On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par :

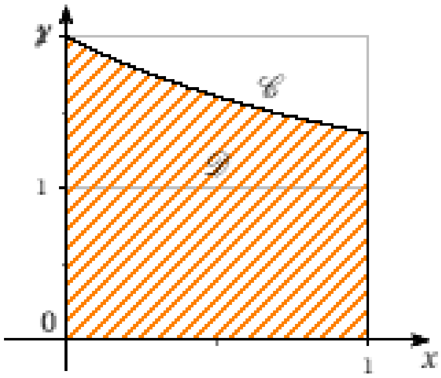
$$g(x) = 1 + e^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] : $g(x) \geq 0$.

On note **C** la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et **D** le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe **C**, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

La courbe **C** et le domaine **D** sont représentés ci-contre.

Le but de cet exercice est de partager le domaine **D** en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (**partie A**), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (**partie B**).

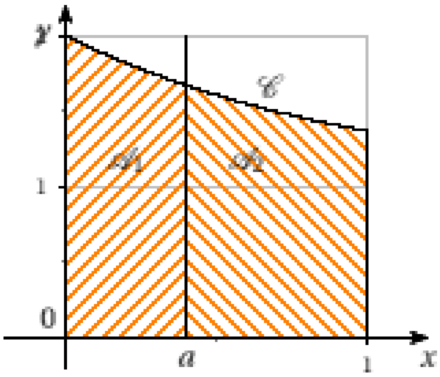


Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$.

On note A_1 l'aire du domaine compris entre la courbe **C**, l'axe (Ox), les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis A_2 celle du domaine compris entre la courbe **C**, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.

A_1 et A_2 sont exprimées en unité d'aire.



1\. *a*. Démontrer que $A_1 = a - e^{-a} + 1$.

b. Exprimer A_2 en fonction de a.

2\. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$$

a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1]. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle [0 ; 1] en un réel α . Donner la valeur de α arrondie au centième.

3\. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires A_1 et A_2 sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine **D** en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1\. Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2\. Déterminer la valeur exacte du réel b.

CORRECTION

Partie A

1\. *a*. La fonction g est positive sur [0 ; 1] donc $A_1 = \int_0^a g(x)\,dx$

$A_1 = \left[x - e^{-x} \right]_0^a = a - e^{-a} - (-1)$

$A_1 = a - e^{-a} + 1$.

.

b. $A_2 = \int_a^1 g(x)\,dx = \left[x - e^{-x} \right]_a^1 = 1 - e^{-1} - (a - e^{-a})$

$A_2 = e^{-a} - a + 1 - e^{-1}$.

2\. *a*. f est dérivable sur [0 ; 1] (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et $f'(x) = 2 + 2e^{-x}$, la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur [0 ; 1].

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	$-2+\frac{1}{e}$ ↗	$2-\frac{1}{e}$

b. f est définie continue sur [0 ; 1], $f([\,0\,;1\,]) = \left[-2+\frac{1}{\mathrm{e}}\,;2-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

$0 \in \left[-2+\frac{1}{\mathrm{e}}\,;2-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle [0 ; 1].

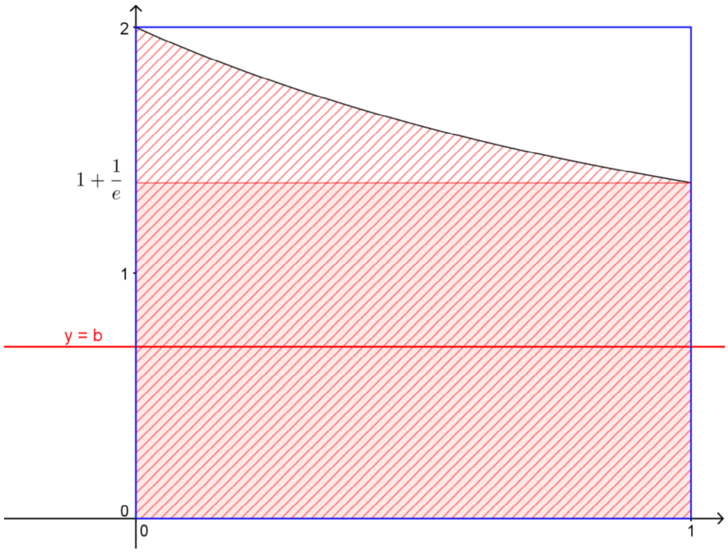
$f(0{,}45) \approx -0{,}007$ et $f(0{,}46) \approx 0{,}02$ donc $\alpha \approx 0{,}45$

3. $A_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$ et $A_2 = \mathrm{e}^{-a} - a + 1 - \mathrm{e}^{-1}$

$A_1 = A_2 \Leftrightarrow a - \mathrm{e}^{-a} + 1 = \mathrm{e}^{-a} - a + 1 - \mathrm{e}^{-1}$

$\Leftrightarrow 2a - 2\,\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-1} = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$

L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle [0 ; 1] donc $a \approx 0{,}45$



Partie B

1. L'aire du rectangle rose est égale à $1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$. Cette aire est comprise entre 1 et 1,5.

L'aire hachurée est inférieure à l'aire du rectangle bleu donc à 2

L'aire du domaine inférieur est égale à $B_1 = 1 \times b$.

Si la droite d'équation $y = b$ coupe le domaine en deux domaines de même aire ces deux domaines ont chacun une aire inférieure à 1 donc $b < 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. $B_1 = 1 \times b$ et $A = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} - (-1) = 2 - \mathrm{e}^{-1}$

$B_1 = B_2 = \frac{1}{2}B \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}(2 - \mathrm{e}^{-1}) \Leftrightarrow b = 1 - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$