FRANCE SEPTEMBRE 2006

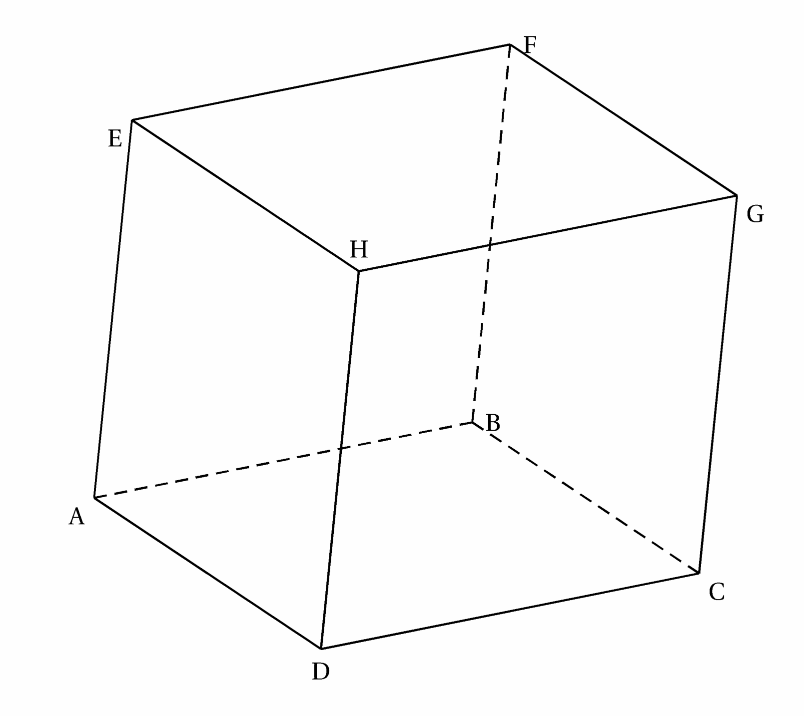
On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH et représenté ci-dessous.
Soit I le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B ; 2) et enfin K celui de (G ; 2) et (C ; 1).
On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Δ cet ensemble.

1. Placer les points 1, J et K sur la figure ci-dessous.
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(\text{A} ; \frac{1}{3}\text{AD} ; \frac{1}{3}\text{AB} ; \frac{1}{3}\text{AE}\right)$.

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.
4. Soit P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x ; y ; z).

a. Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet (x ; y ; z) est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
b. Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. *a*. Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.



CORRECTION

1. I est le barycentre de {(E ; 2) (F ; 1)} donc pour tout point M de l'espace (1 + 2) MI = 2 ME + MF

en particulier si M = E : 3 EI = EF donc $\text{EI} = \frac{1}{3}\text{EF}$

J est le barycentre de {(F ; 1) (B ; 2)} donc $\text{BJ} = \frac{1}{3}\text{BF}$

K est le barycentre de {(G ; 2) (C ; 1)} donc $\text{GK} = \frac{1}{3}\text{GC}$

2. $\Omega \in \Delta$ donc ΩI = ΩJ = ΩK donc Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK.

3. Soit $i = \frac{1}{3}\text{AD}$; $j = \frac{1}{3}\text{AB}$; $k = \frac{1}{3}\text{AE}$ or $\text{AI} = \text{AE} + \frac{1}{3}\text{AB} = j + 3k$ donc I a pour coordonnées (0, 1, 3)

$\text{AJ} = \text{AB} + \frac{1}{3}\text{AE} = 3j + k$ donc J a pour coordonnées (0, 3, 1)

$\text{AK} = \text{AD} + \text{AB} + \frac{2}{3}\text{AE} = 3i + 3j + 2k$ donc K a pour coordonnées (3, 3, 2)

4. PQ a pour coordonnées (– 1 ; 3 ; 3), IJ a pour coordonnées (0 ; 2 ; – 2), IK a pour coordonnées (3 ; 2 ; – 1)

$\text{PQ} \cdot \text{IJ} = -1 \times 0 + 3 \times 2 + 3 \times (-2) = 0$ et $\text{PQ} \cdot \text{IK} = -1 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times (-1) = 0$

donc (PQ) est orthogonale à deux droites (IJ) et (IK) sécantes du plan (IJK) donc au plan (IJK)

5. *a*. $M \in \Delta \Leftrightarrow MI = MJ = MK$

$MI^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 10$

$MJ^2 = x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2z + 10$

$MK^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2$

$MK^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 4z + 22$

$MI = MJ \Leftrightarrow MI^2 = MJ^2 \Leftrightarrow -4y + 4z = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$

$MK = MJ \Leftrightarrow MK^2 = MJ^2 \Leftrightarrow 6x + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + z - 6 = 0$

donc $M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + z - 6 = 0 \end{cases}$

Δ est l'intersection de deux plans non parallèles, l'un d'équation $y - z = 0$, l'autre d'équation $3x - z - 6 = 0$ donc Δ est une droite.

b. P a pour coordonnées (2 ; 0 ; 0) donc $y - z = 0$ est vérifié

$3x - z - 6 = 3 \times 2 - 0 - 6 = 0$ donc la deuxième condition est vérifiée. $P \in \Delta$

Q a pour coordonnées (1 ; 3 ; 3) donc $y - z = 0$ est vérifié

$3x - z - 6 = 3 \times 1 - 3 - 6 = 0$ donc la deuxième condition est vérifiée. $Q \in \Delta$

6. *a*. la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK) donc un vecteur normal au plan (IJK) est PQ de coordonnées (– 1 ; 3 ; 3)

Une équation de (IJK) est de la forme $-x + 3y + 3z + d = 0$

I a pour coordonnées (0, 1, 3) et $I \in$ (IJK) donc $0 + 3 \times 1 + 3 \times 3 + d = 0$ donc $d = -12$

Une équation de (IJK) est $-x + 3y + 3z - 12 = 0$

b. $\Omega \in$ (IJK) donc ses coordonnées vérifient : $-x + 3y + 3z - 12 = 0$

$\Omega \in \Delta$ donc ses coordonnées vérifient : $\begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + z - 6 = 0 \end{cases}$ soit le système $\begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + z - 6 = 0 \\ -x + 3y + 3z - 12 = 0 \end{cases}$

Puisque $y = z$, par substitution le système devient : $\begin{cases} y = z \\ 3x + z - 6 = 0 \\ -x + 6z - 12 = 0 \end{cases}$

donc en remplaçant dans la dernière équation z par $-3x + 6$, on obtient :

$\begin{cases} y = z \\ z = -3x + 6 \\ -x - 18x + 36 - 12 = 0 \end{cases}$ donc $x = \dfrac{24}{19}$ donc $z = -3 \times \dfrac{24}{19} + 6 = \dfrac{42}{19}$ et $y = z$

Ω a pour coordonnées $\left(\dfrac{24}{19} ; \dfrac{42}{19} ; \dfrac{42}{19}\right)$