Exercice 1 (6 points) ***Commun à tous les candidats***

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = (x + 2)\,e^{-x}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Etude de la fonction f

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec les axes du repère.

b. Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe C.

c. Etudier les variations de la fonction f sur R.

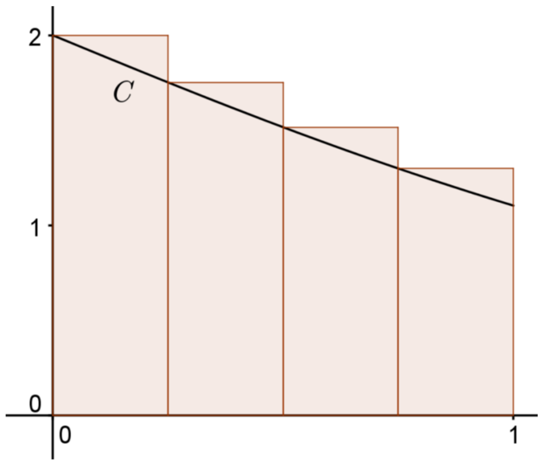
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine D en calculant une somme d'aire de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle [0 ; 1] en quatre intervalles de même longueur :

- sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, on construit le rectangle de hauteur $f(0)$.
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, on construit le rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$.
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, on construit le rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, on construit le rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine D en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation	Affecter à S la valeur 0
Traitement	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question N et un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle [0 ; 1] en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2. *a.*

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = (-x - 3)\,e^{-x}$. On admet que la fonction g est une primitive de la fonction f sur R.

a. Calculer l'aire exacte A du domaine D, exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant A par la valeur trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. *a.* c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

CORRECTION

1\. *a.* $e^0 = 1$ donc $f(0) = 2$ donc C coupe l'axe des ordonnées en A (0 ; 2)
La fonction exponentielle est strictement positive sur R, donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
C coupe l'axe des abscisses en B (– 2 ; 0).

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ or $f(x) = x\,e^{-x} + 2\,e^{-x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$ à C.

c. Soit $\begin{cases} u(x) = x+2 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{-x} + (x+2)(-e^{-x})$

$f'(x) = e^{-x}(1 - x - 2) = -e^{-x}(x+1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0

2\. *a.*

k	initialisation	0	1	2	3
$f\left(\frac{k}{4}\right)$		2	1,752	1,516	1,299
$\frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$		0,5	0,438	0,379	0,325
S	0	0,5	0,938	1,317	1,642

Une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme est 1,642.

b. Les rectangles successifs ont pour largeur $\frac{1}{N}$ et pour longueur $f\left(\frac{k}{N}\right)$ donc pour aire $\frac{1}{N} f\left(\frac{k}{N}\right)$.

Variables	k est un nombre entier
	N est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation	Affecter à S la valeur 0
Traitement	Pour k variant de **0 à $N - 1$**
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{N} f\left(\frac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie	Afficher S

3\. *a.* A = $\int_0^1 f(x)\,dx = g(1) - g(0) = -4\,e^{-1} - (-3\,e^0) = 3 - 4\,e^{-1}$

b. A – 1,642 ≈ – 0,114.