Amérique du Sud novembre 2005

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives *a*, *b*, *c* et *d* telles que : $a = i$, $b = 1 + 2i$, $c = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $d = 3 + 2i$.

On considère la similitude directe *s* qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe *z* et M′, d'affixe *z*′, son image par *s*.

1. Exprimer *z*′ en fonction de *z*. Déterminer les éléments caractéristiques de *s*.

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude *s*, les termes de la suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $U_n = 2^n - 1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels *n* et *p* non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$.
La notation pgcd(*a* ; *b*) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels *a* et *b*.
Montrer pour $n \geq p$ l'égalité : $\text{pgcd}(U_n ; U_p) = \text{pgcd}(U_p ; U_{n-p})$.

6. Soit *n* et *p* deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n;p)}$.
Déterminer le nombre : $\text{pgcd}(U_{2005} ; U_{15})$.

CORRECTION

1. $c = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$

s est une similitude directe donc de la forme $z' = az + b$

$s(A) = B$ et $s(C) = D$ donc $1 + 2i = a\,i + b$ et $3 + 2i = a(1 + i) + b$

il s'agit donc de résoudre le système : $\begin{cases} a\,i + b = 1 + 2i \\ a(1 + i) + b = 3 + 2i \end{cases}$

Par différence membre à membre : $a = 2$ et donc en remplaçant $b = 1$ donc $z' = 2z + 1$

$a = 2$ donc *s* est une homothétie de rapport 2 de centre Ω point invariant par *s*

$z = 2z + 1$ donc $z = -1$ donc le centre de *s* est le point $\Omega(-1)$.

2. pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} - 2U_n = 1$ donc il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $u\,U_{n+1} + v\,U_n = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, pour tout entier naturel *n*, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Soit $M_0 = O$, M_n le point d'affixe U_n d'après la première question $M_{n+1} = s(M_n)$
donc M_n est le milieu de $[\Omega M_{n+1}]$

4. Démonstration par récurrence :

Initialisation : $U_0 = 2^0 - 1 = 0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Montrons que pour tout *n* la propriété est héréditaire c'est-à-dire que si la propriété est craie au rang *n* : $U_n = 2^n - 1$ alors elle est vraie pour $n + 1$: $U_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

$U_{n+1} = 2U_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$.

La propriété est vraie au rang $(n + 1)$. Elle est donc vraie pour tout *n* de $\mathbb{N}$.

5. si $n \geq p$ alors $n - p \geq 0$ donc $U_{n-p} = 2^{n-p} - 1$ et $U_p = 2^p - 1$

$U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p} = (2^p - 1)(2^{n-p} - 1 + 1) + 2^{n-p} - 1 = (2^p - 1)2^{n-p} + 2^{n-p} - 1 = 2^n - 2^{n-p} + 2^{n-p} - 1 = 2^n - 1$

donc $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$.

Soit $d = \text{pgcd}(U_n ; U_p)$

d divise U_n et U_p donc *d* divise $U_p(U_{n-p} + 1)$ donc divise $U_p(U_{n-p} + 1) - U_n$ soit U_{n-p}

d divise U_{n-p} et *d* divise U_p donc *d* divise $\text{pgcd}(U_p ; U_{n-p})$.

Réciproquement soit $\delta = \text{pgcd}(U_p ; U_{n-p})$.

δ divise U_p et δ divise U_{n-p} donc δ divise $U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$ soit δ divise U_n

δ divise U_n et *d* divise U_p donc δ divise $\text{pgcd}(U_n ; U_p)$.

d et δ sont des entiers naturels non nuls , *d* divise δ et δ divise *d* donc $d = \delta$

6. On sait que pour $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $q^k - 1 = (q - 1)(q^{k-1} + \ldots + 1)$, donc $q - 1$ divise $q^k - 1$.

Soit *d* le pgcd de n et p. Il existe donc deux naturels *k* et *k*' premiers entre eux tels que $n = k\,d$ et $p = k'\,d$.

$U_n = 2^n - 1 = 2^{kd} - 1$ soit $a = 2^d$

$U_n = a^k - 1 = (a - 1)(a^{k-1} + \ldots + 1)$ donc $a - 1$ divise U_n

De même $U_p = 2^p - 1 = 2^{k' d} - 1 = a^{k'} - 1 = (a - 1)(a^{k' - 1} + \dots + 1)$ donc $a - 1$ divise U_p
$a - 1 = 2^d - 1 = U_d$ donc U_d divise U_n et U_p soit $U_{pgcd(n\,;\,p)}$ divise U_n et U_p donc $U_{pgcd(n\,;\,p)}$ divise leur PGCD soit $U_{pgcd(n\,;\,p)}$ divise pgcd (U_n, U_p).

Réciproquement

Application : $15 = 3 \times 5$. Or 5 divise 2 005, mais 3 ne le divise pas. Donc pgcd(2 005, 15) = 5
$pgcd(U_{2\,005}, U_5) = U_5$ (d'après la question précédente).
$U_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ donc $pgcd(U_{2\,005}, U_5) = 31$.