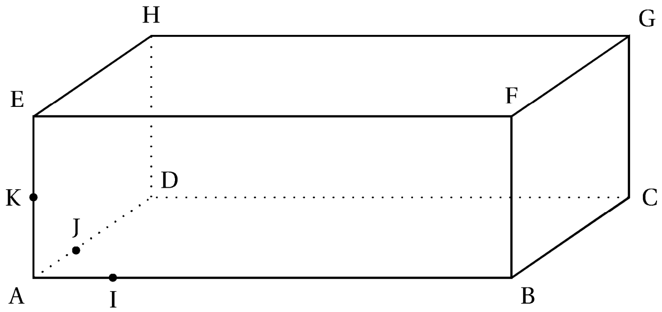
Polynésie juin 2015

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$.

1 Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).

2 Déterminer une équation du plan (IJG).

3 Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

4 Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie)** On ne demande pas de justification.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 + 4z + 3$.

1 Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants.
Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle

2 Soit A le point d'affixe $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3 Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4 Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble E.

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.
Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

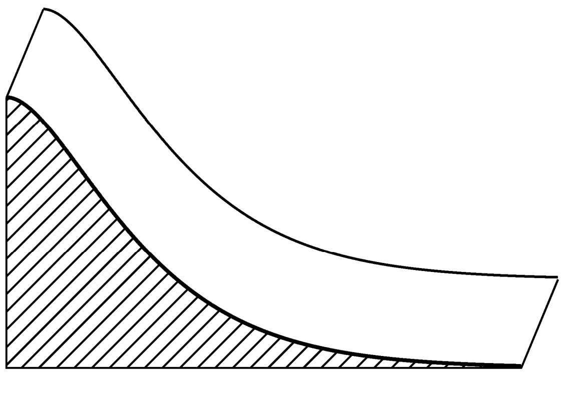
1 Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?

2 *a* Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

b De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52% de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans.On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 *m*.
Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

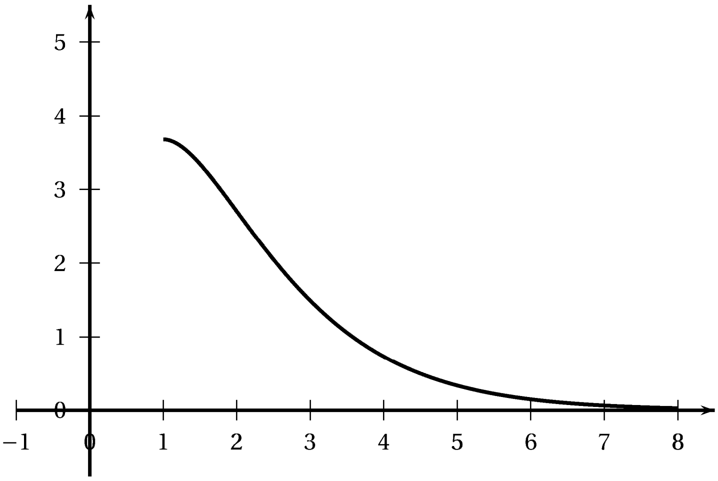
Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :



Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe C représentant la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 8] par $f(x) = (a\,x + b)\,\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels.

La courbe C est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1 On souhaite que la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de l'entier b.

2 On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1\,;\,8]$ par $f(x) = 10\,x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

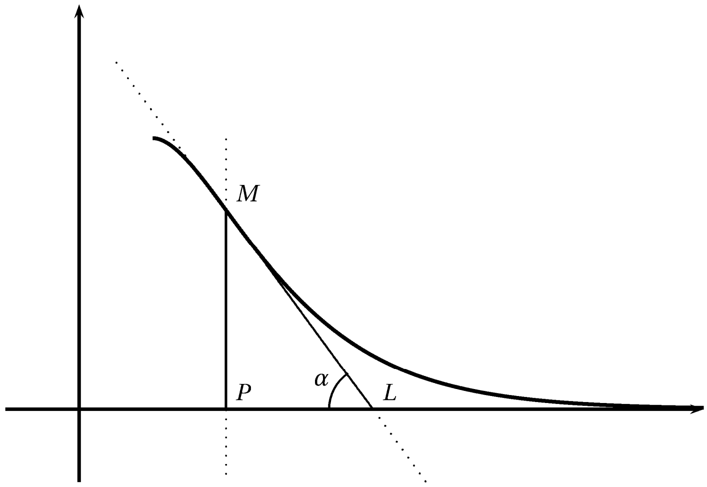
1 Soit g la fonction définie sur [1 ; 8] par $g(x) = 10\,(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

2 Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe C, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à C et l'axe des abscisses. La figure suivante illustre la situation :



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1 On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 8].

On admet que, pour tout x de l'intervalle [1 ; 8], $f\,'(x) = 10\,(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Étudier les variations de la fonction $f\,'$ sur l'intervalle [1 ; 8].

2 Soit x un réel de l'intervalle]1 ; 8] et soit M le point d'abscisse a de la courbe C. Justifier que $\tan\alpha = |f\,'(x)|$.

3 Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-v_n}\right)$.

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.

On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A Conjectures à l'aide d'un algorithme

1 Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de Sn pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur …
	S prend la valeur
Traitement :	Pour k variant de à faire
	prend la valeur
	prend la valeur
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2 À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1 Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

2 Calculer u_2, u_3 et u_4 Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3 Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C Étude de (S_n)

1 Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

2 Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

3 Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 5 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1 On appelle I la matrice identité d'ordre 2 Vérifier que $A^2 = A + 2I$.

2 En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.

3 On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul, $\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.

4 Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison – 1.

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de k_n en fonction de n.

5 On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de t_n en fonction de n.

6 Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

7 En déduire alors, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n.

CORRECTION

Polynésie juin 2015
EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

1 I a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0) J (0 ; 1 ; 0) donc $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n}\ \overrightarrow{IJ} = -1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times (-9) = 0$ donc

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = 6\,\overrightarrow{AI} + 4\,\overrightarrow{AJ} + 2\,\overrightarrow{AK}$ donc G a pour coordonnées (6 ; 4 ; 2) donc $\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\vec{n}\ \overrightarrow{IG} = 5 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times (-9) = 0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont orthogonaux.
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc $\vec{n}$ est normal au plan (IJG).

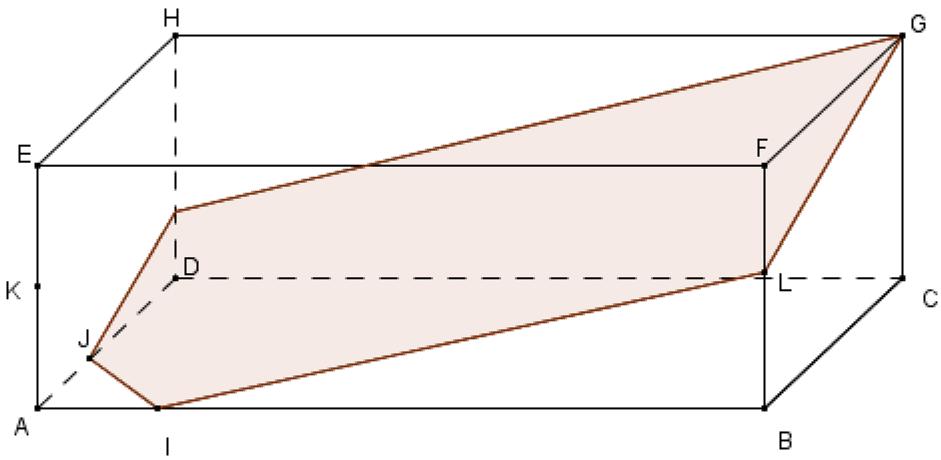
2 $\vec{n}$ est normal au plan (IJG) donc une équation du plan (IJG) est de la forme $2x + 2y - 9z + d = 0$.
I appartient au plan donc $2x_I + 2y_I - 9z_I + d = 0$ soit $2 + d = 0$ donc $d = -2$.
Une équation du plan (IJG) est $2x + 2y - 9z - 2 = 0$.

3 B a pour coordonnées (6 ; 0 ; 0) F (6 ; 0 ; 2) donc $\overrightarrow{BF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, la droite (BF) a pour représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$, le point d'intersection du plan (IJG) et de la droite (BF) a donc des coordonnées de la forme $(6 ; 0 ; 2t)$

Il appartient au plan (IJG) donc $2 \times 6 + 2 \times 0 - 9 \times 2t - 2 = 0$ soit $10 - 18t = 0$ donc $t = \dfrac{5}{9}$, L a pour coordonnées $\left(6 ; 0 ; \dfrac{10}{9}\right)$.

4 Le plan (IJG) coupe la face ABCD du pavé suivant [IJ], la face AEFB suivant [IL].
Le plan (IJG) coupe la face BCGF du pavé suivant [LG], .
Les faces ADHE et BCGF sont parallèles donc le plan (IJG) les coupe suivant deux droites parallèles donc l'intersection du plan (IJG) et de la face ADHE est le segment passant par I et parallèle à (GL) Ce segment coupe [DH] en M donc l'intersection du plan (IJG) et de la face DCGH est [MG]



EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1 Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé donc quand $z = z'$

$z^2 + 4z + 3 = z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = -3$ donc $z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$

Il existe deux points invariants A le point d'affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$

$$\left|\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{12}{4} = 3 \text{ donc } \left|\frac{-3 + i\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{3}$$

$$\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \text{soit } z_2 = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ sont conjugués donc $z_1 = \sqrt{3}\,e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

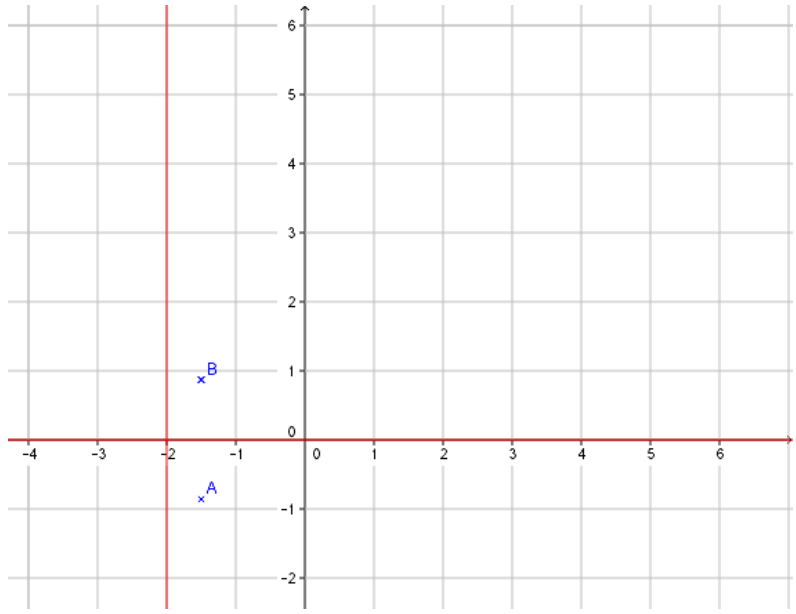
2 OA = $|z_1| = \sqrt{3}$ et OB = $|z_2| = \sqrt{3}$, AB = $|z_1 - z_2| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ donc OA = OB = AB, OAB est un triangle équilatéral.

3 Soit $z = x + iy$; $z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$ donc $z^2 + 4z + 3 = (x^2 - y^2 + 4x + 3) + i(2xy + 4y)$

Le point M' est sur l'axe des réels si et seulement si $(2xy + 4y) = 0$ soit $2y(x + 2) = 0$ donc soit $y = 0$ soit $x = -2$

E est donc la réunion de deux droites : l'axe des réels ($y = 0$) et la droite d'équation $x = -2$

4



EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

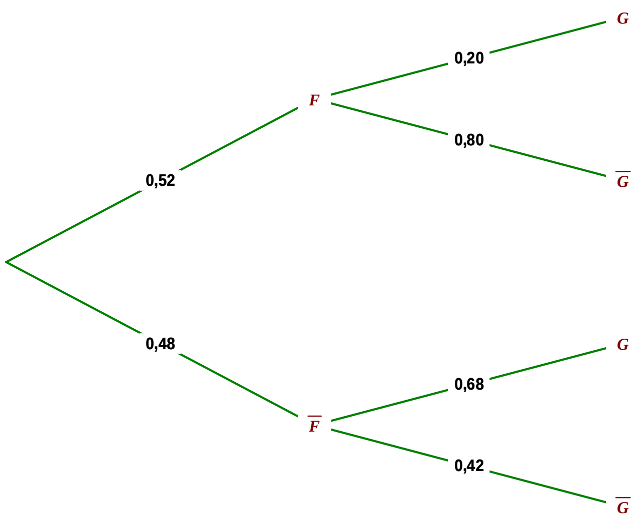
1 $P(153 \le X_1 \le 177) \approx 0{,}95$

2 *a* $P(X_2 > 170) = 0{,}68$

b Soit les événements :

F : « la personne choisie est une femme entre 18 et 50 ans ».

G : « la personne choisie mesure plus de 1,70 mètre ».



$P_F(G) = P(X_1 > 170) \approx 0{,}20$

$p(G) = p(F \cap G) + p(\overline{F} \cap G)$

$p(G) = 0{,}52 \times 0{,}20 + 0{,}48 \times 0{,}68 \approx 0{,}43$

$p_G(F) = \dfrac{p(F \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0{,}52 \times 0{,}20}{0{,}43} \approx 0{,}24$

La probabilité que la personne choisie soit une femme sachant qu'elle mesure plus de 1,70 m est donc de 0,24.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Partie A Modélisation

1 Si la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 1 est horizontale alors $f'(1) = 0$.

$f'(x) = a\,e^{-x} - (a\,x + b)\,e^{-x} = (-a\,x + a - b)\,e^{-x}$

$f'(1) = b\,e^{-1} = 0$ or $e^{-1} \neq 0$ donc $b = 0$ donc $f(x) = a\,x\,e^{-x}$

2 $f(1) = a\,e^{-1}$ et a est un entier naturel tel que $3{,}5 \leq a\,e^{-1} \leq 4$ ou $3{,}5\,e \leq a \leq 4\,e$, $3{,}5 \approx 9{,}5$ et $4\,e \approx 10{,}8$ donc $a = 10$.

$f(x) = 10\,x\,e^{-x}$

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

1 $g'(x) = 10 \times (-1) \times e^{-x} + 10(-x - 1) \times (-e^{-x}) = -e^{-x}(10 - 10\,x - 10) = 10\,x\,e^{-x}$

g est une primitive de f

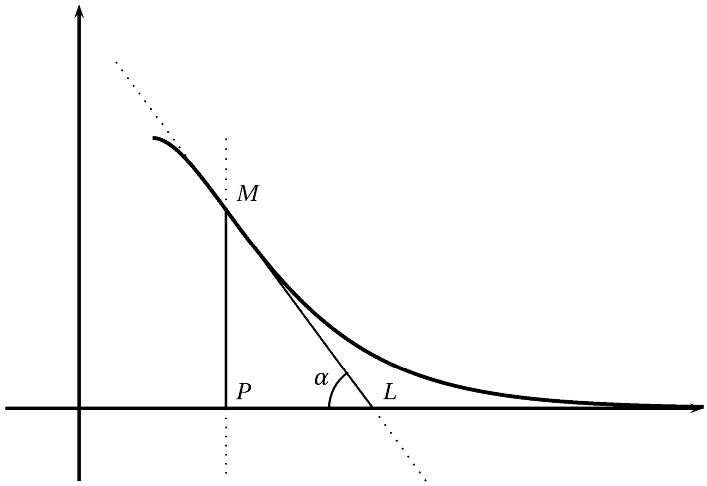
2 La fonction f est positive sur [1 ; 8]

L'aire du mur à peindre correspond à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 8$ elle est donc égale à $\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = [\,g(x)\,]_0^8$

L'aire est donc $-90\,e^{-8} + 20\,e^{-1}$ *u a* L'unité est le mètre donc l'aire est de $-90\,e^{-8} + 20\,e^{-1}$

Le montant du devis sera donc de $300 + 50(-90\,e^{-8} + 20\,e^{-1})$ soit 666,37 €

Partie C Une contrainte à vérifier



1 $f(x) = -10\,e^{-x} - 10(1 - x)\,e^{-x} = 10(2 - x)\,e^{-x}$ La fonction exponentielle est positive sur R donc $f(x)$ a le même signe que $2 - x$, donc $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1\,;2]$

f' est donc croissante sur [1 ;2] et décroissante sur [2 ; 8]

2 Une équation de la tangente à la courbe C au point M d'abscisse a est donc de la forme $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Le point L est le point de cette droite tel que $y = 0$ donc son abscisse est solution de $f'(a)(x_L - a) + f(a) = 0$

$f'(a)(x_L - a) = -f(a)$ OR $a \neq 1$ donc $f'(a) \neq 0$ donc $x_L - a = -\dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

Dans le triangle MPL rectangle en P on a : $\tan\alpha = \dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PL}} = \left|\dfrac{f(a)}{x_L - a}\right|$

$f(a) > 0$ donc $\dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PL}} = \dfrac{f(a)}{\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|} = |\,f'(a)\,|$ soit $\tan\alpha = |\,f'(a)\,|$

3 f' est donc croissante sur [1 ;2] et décroissante sur [2 ; 8]

$f'(1) < 0$ et $f'(8) < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur [2 ; 8] donc $|\,f'(x)\,| = -f'(x)$

donc $|\,f'\,|$ est donc décroissante sur [1 ;2] et croissante sur [2 ; 8] donc admet un maximum pour $x = 2$ et $|\,f'(2)| \approx 1{,}35$

La fonction tangente est croissante sur [0 ; 90°[, tan 55 ≈ 1,43 donc tan α < tan 55

Le toboggan est conforme

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité
Partie A Conjectures à l'aide d'un algorithme
1

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur **ln(2)**
	S prend la valeur **0**
Traitement :	Pour k variant de **1** à ***n*** faire
	S prend la valeur ***S + v***
	v prend la valeur $\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2 Les valeurs de S_n augmentent donc la suite (S_n) semble être croissante

Partie B Étude d'une suite auxiliaire

1 $u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{v_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right)} = 2-\mathrm{e}^{-v_n} = 2-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{v_n}}$ donc $u_{n+1} = 2-\dfrac{1}{u_n}$

2 $u_2 = 2-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ **,** $u_3 = 2-\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, et $u_4 = 2-\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

Initialisation, si $n = 1$, $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{3}{2} = u_1$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$

Hérédité, montrons pour tout entier naturel n non nul, que si $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ alors $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$

$u_{n+1} = 2-\dfrac{1}{u_n}$ or par hypothèse $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ donc $u_{n+1} = 2-\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2(n+1)-n}{n+1}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est héréditaire et initialisée donc pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C Étude de (S_n)

1 Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ donc $v_n = \ln(u_n)$ or $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ donc $v_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

soit $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

2 $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln 2 + [\ln 3 - \ln 2] + [\ln 4 - \ln 3] = \ln(4)$

3

$$\begin{array}{lcccc}
v_1 & = & \cancel{\ln(2)} & & \\
v_2 & = & \cancel{\ln(3)} & - & \cancel{\ln(2)} \\
v_3 & = & \cancel{\ln(4)} & - & \cancel{\ln(3)} \\
\dots & & & & \\
v_{n-1} & = & \cancel{\ln(n)} & - & \cancel{\ln(n-1)} \\
v_n & = & \ln(n+1) & - & \cancel{\ln(n)}
\end{array}$$

donc par addition terme à terme : $S_n = \ln(n+1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

EXERCICE 5 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1 $A + 2I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-18 & -24+30 \\ 12-15 & -18+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

donc $A^2 = A + 2I$.

2 $A^2 = A + 2I$ donc $A^3 = A \times A^2 = A \times (A + 2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I$

$A^4 = A \times A^3 = A(3A + 2I) = 3A^2 + 2A = 3(A + 2\mathrm{I}) + 2A = 5A + 6\mathrm{I}$

3 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.

Initialisation : $A^0 = \mathrm{I} = 0 \times A + 1 \times \mathrm{I} = r_0 A + s_0 \mathrm{I}$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité, montrons pour tout entier naturel n, si $A^n = r_n A + s_n I$ alors $A^{n+1} = r_{n+1} A + s_{n+1} I$ avec $\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$

$A^{n+1} = A \times A^n$ or par hypothèse $A^n = r_n A + s_n I$ donc $A^{n+1} = A(r_n A + s_n I) = r_n A^2 + s_n A$

or $A^2 = A + 2I$ donc $A^{n+1} = r_n(A + 2I) + s_n A = (r_n + s_n)A + 2r_n \mathrm{I}$ donc $A^{n+1} = r_{n+1} A + s_{n+1} I$ avec $\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est héréditaire et initialisée donc pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.

4 $k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = s_n - r_n$ donc $k_{n+1} = -k_n$

La suite (k_n) est géométrique de raison -1, donc $k_n = (-1)^n k_0$ or $k_0 = r_0 - s_0 = -1$ donc $k_n = -(-1)^n$

5 $t_n = 2^{n-1} t_1$ avec $t_1 = r_1 + \frac{-1}{3}$ donc $t_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ donc $t_n = 2^{n-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2^n}{3}$

6 $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^n}{3}$ donc $r_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$

$s_n = 2r_{n-1}$ donc $s_n = 2 \times \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} = \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3}$

7 $A^n = r_n A + s_n I$ donc $A^n = r_n \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + s_n \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix}$

$-4r_n + s_n = -4 \times \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3} = \frac{2^n(-4+1) + (2+4) \times (-1)^n}{3} = -2^n + 2 \times (-1)^n$

$5r_n + s_n = 5 \times \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3} = \frac{2^n(5+1) + (2-5) \times (-1)^n}{3} = 2 \times 2^n - (-1)^n = 2^{n+1} - (-1)^n$

$3r_n = 3 \times \frac{2^n - (-1)^n}{3} = 2^n - (-1)^n$ donc

$A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times (-1)^n & 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$