Métropole & La Réunion septembre 2007

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

- P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = n\,x^{n-1}.$$

- Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = n\,u^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1 ; 1[$ par :

$$g(0) = 0 \text{ et } g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1 ; 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi ; 0[$ par :

$$h(x) = g(\cos x).$$

a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi ; 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

b. Calculer $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, puis donner l'expression de $h(x)$.

Nouvelle- Calédonie novembre 2007
Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[\alpha\ ;+\infty[$. Compléter la phrase suivante :

On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ……

2. Démontrer le théorème des gendarmes.

Soient f, g h trois fonctions définies sur $[\alpha\ ;+\infty[$. et L un nombre réel.
Si g et h ont pour limite commune L quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)$ est égale à L.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x} - x - 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C).

1. Soit a un nombre réel. Ecrire en fonction de a, une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) en un point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction à effectuer sur la feuille annexe de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5.

On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, les inégalités suivantes :

(1) $e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \dfrac{1}{n}$ (2) $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \dfrac{1}{n+1}$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier non nul n :

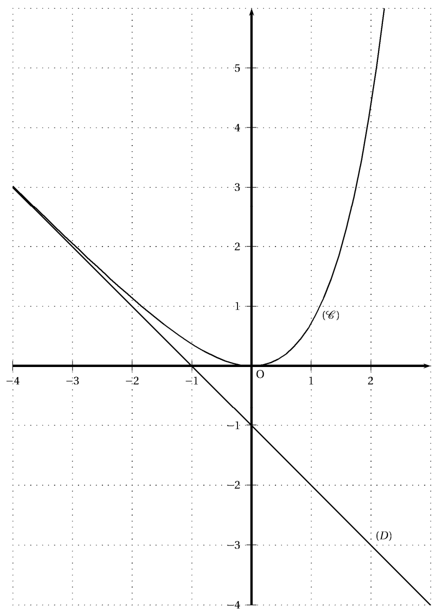
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier non nul n :

$$e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. En déduire des question précédentes un encadrement de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

puis sa limite en $+\infty$.



Polynésie juin 2008

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète. ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A ; +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

Proposition 2 : « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.

Sa masse initiale est de 10 kg.

Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 *g* ».

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(A) = p(B) = 0,4$ alors $p(A \cup B) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication.

Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses. On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 ».