Un orfèvre possède 101 pièces d'or et constate le fait suivant : pour chacune des pièces, il existe une manière de scinder les 100 autres en 2 groupes de 50 pièces de même poids total. Il en conclut alors que toutes les pièces ont nécessairement le même poids. Comment *a-t*-il pu conclure à ce résultat ?

Pour tout entier naturel n impair, on considère la matrice M carrée de taille n construite de la manière suivante :

- on numérote les pièces de 1 à n
- Lorsque l'orfèvre retire la i-ème pièce, Il sépare le reste en 2 groupes A et B de mêmes poids
- on définit alors $m_{i\,j}$ le coefficient de M par :

$$m_{i\,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si la j-ième pièce se trouve dans le groupe A} \\ 2 \text{ si la j-ième pièce se trouve dans le groupe A} \end{cases}$$

1 Cas particulier où $n = 3$

Soit la matrice $\text{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Préciser la signification des éléments de la première ligne de la matrice

b. Soit $\text{N} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que N inverse de M.

c. On note X la matrice constituée des poids des pièces

$$\text{X} = \begin{pmatrix} \text{poids de la pièce 1} \\ \text{poids de la pièce 2} \\ \text{poids de la pièce 3} \end{pmatrix}.$$

Soit P_t le poids total des 3 pièces déterminer M X en fonction de P_t

d. En déduire la matrice X et le réponse dans le cas $n = 3$

CORRECTION

Supposons qu'il existe un certain nombre de pièces de même poids (lot A) et d'autres pièces de poids différents (lot B)

Si le lot contient un nombre pair de pièces de poids différents.
On retire une de ces pièces du lot B et on scinde les autres en 2 groupes de 50 pièces. Il reste un nombre impair de pièces de poids différents donc quelque soit la façon de former les groupes, un lot contient au moins une pièce de poids différent de plus que l'autre lot.
Les deux groupes n'ont pas le même poids total donc ce cas est exclu.

Si le lot contient un nombre impair de pièces de poids différents.
On retire une de ces pièces du lot A et on scinde les autres en 2 groupes de 50 pièces. Il reste un nombre impair de pièces de poids différents donc quelque soit la façon de former les groupes, un lot contient au moins une pièce de poids différent de plus que l'autre lot.
Les deux groupes n'ont pas le même poids total donc ce cas est exclu.
Toutes les pièces ont nécessairement le même poids.

Pour tout entier naturel n impair, on considère la matrice M carrée de taille n construite de la manière suivante :

- on numérote les pièces de 1 à n
- Lorsque l'orfèvre retire la i-ème pièce, Il sépare le reste en 2 groupes A et B de mêmes poids
- on définit alors $m_{i\,j}$ le coefficient de M par : $m_{i\,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si la j-ième pièce se trouve dans le groupe A} \\ 2 \text{ si la j-ième pièce se trouve dans le groupe A} \end{cases}$

1 Cas particulier où $n = 3$

Soit la matrice $\text{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. L'orfèvre retire la première pièce (numérotée 1), $m_{1\,1} = 1$,
Il sépare les 2 autres pièces en deux groupes donc 1 pièce par groupe.
Quitte à renommer les lots, la pièce numérotée 2 est dans le groupe A donc $m_{1\,2} = 2$
La pièce numérotée 3 n'est pas dans le même lot donc pas dans le groupe A donc $m_{1\,3} = 0$

b. $$\mathrm{M\,N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M\,N} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{4}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{4}{3}-\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{4}{3}-\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$. N inverse de M.

c. Soit P_t le poids total des 3 pièces déterminer M X en fonction de P_t.
Soit p_1 le poids de la pièce 1 ; p_2 le poids de la pièce 2 ; p_3 le poids de la pièce 3.

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ donc M X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2\,p_2 \\ 2\,p_1 + p_2 \\ 2\,p_1 + p_3 \end{pmatrix}$$

Quand la pièce 1 est retirée : La pièce 2 est dans B et la pièce 3 est dans A et $p_2 = p_3$ donc $p_1 + 2\,p_2 = p_1 + p_2 + p_3 = \mathrm{P}_t$
Quand la pièce 2 est retirée : La pièce est dans B et la pièce 3 est dans A et $p_1 = p_3$ donc $2\,p_1 + p_2 = p_1 + p_2 + p_3 = \mathrm{P}_t$
Quand la pièce 3 est retirée: La pièce 1 est dans B et la pièce 2 est dans A et $p_1 = p_2$ donc $2\,p_1 + p_3 = p_1 + p_2 + p_3 = \mathrm{P}_t$

$$\mathrm{M\,X} = \begin{pmatrix} P_t \\ P_t \\ P_t \end{pmatrix}.$$

d. $$\mathrm{M\,X} = \begin{pmatrix} P_t \\ P_t \\ P_t \end{pmatrix} \text{ donc N M X = N} \begin{pmatrix} P_t \\ P_t \\ P_t \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{N\,M} = \mathrm{I}_3 \text{ donc X = N} \begin{pmatrix} P_t \\ P_t \\ P_t \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_t \\ P_t \\ P_t \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}P_t + \frac{2}{3}P_t \\ \frac{2}{3}P_t - \frac{1}{3}P_t \\ \frac{2}{3}P_t - \frac{4}{3}P_t + P_t \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}P_t \\ \frac{1}{3}P_t \\ \frac{1}{3}P_t \end{pmatrix}.$$