**Asie juin 2007**

**EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats**

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

**1.** Si $f$ est la fonction définie pour tout nombre réel $x$ par : $f(x) = \sin^2 x$, alors sa fonction dérivée vérifie, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = \sin 2x$.

**2.** Soit $f$ est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle.

$$\text{Si } f(-1) = -f(1), \text{ alors : } \int_{-1}^{1} t\, f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

**3.** Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

Si $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0 ; 3]$ : $f(x) \leq g(x)$.

**4.** Si $f$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ et si $f$ n'est pas une fonction constante, alors la représentation de $f$ dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.

**EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit $\lambda$ un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel $n$, la suite $(z_n)$ de nombres complexes par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} \end{cases}$. On note $M_n$ le point d'affixe $z_n$.

**1.** Calcul de $z_n$ en fonction de $n$ et de $\lambda$.

**a.** Vérifier les égalités : $z_1 = \mathrm{i}$ ; $z_2 = (\lambda + 1)\,\mathrm{i}$ ; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)\,\mathrm{i}$.

**b.** Démontrer que, pour tout entier $n$ positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\mathrm{i}$.

**2.** Étude du cas $\lambda = \mathrm{i}$.

**a.** Montrer que $z_4 = 0$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $z_{n+4}$ en fonction de $z_n$.

**c.** Montrer que $M_{n+1}$ est l'image de $M_n$ par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

**d.** Représenter les points $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ dans le repère $(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v})$.

**3.** Caractérisation de certaines suites $(z_n)$.

**a.** On suppose qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

**b.** Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel $k$ tel que, pour tout entier naturel $n$ on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

**EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

**I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5 i.

*a*. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe $s$ qui transforme O en A et B en O.

*b*. Déterminer les éléments caractéristiques de $s$. On note $\Omega$ son centre.

*c*. Déterminer le point $s \circ s$ (B) ; en déduire la position du point $\Omega$ par rapport aux sommets du triangle ABO.

2. On note D la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A′ et B′ les points d'affixes respectives $8 + 4\,\mathrm{i}$ et $2 + \mathrm{i}$.

*a*. Démontrer que les points A′ et B′ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite D.

*b*. Vérifier que $s(\text{B}') = \text{A}'$.

*c*. En déduire que le point $\Omega$ appartient au cercle de diamètre [A′B′].

**II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes**

OAB est un triangle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore $s$ est la similitude directe telle que : $s(\text{O}) = \text{A}$ et $s(\text{B}) = \text{O}$. Soit $\Omega$ son centre.

*a*. Justifier le fait que l'angle de $s$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

*b*. Démontrer que $\Omega$ appartient au cercle de diamètre [OA]. On admet de même que $\Omega$ appartient aussi au cercle de diamètre [OB]. En déduire que $\Omega$ est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. On désigne par D une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A′ et B′ les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite D.

*a*. Déterminer les images des droites (BB′) et D par la similitude $s$.

*b*. Déterminer le point $s$(B′).

*c*. En déduire que le point $\Omega$ appartient au cercle de diamètre [A′B′].

**EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats**

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

*a*. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

*b*. Démontrer que $p_{\bar{\mathrm{F}}}(\bar{\mathrm{S}}) = \dfrac{1}{4}$.

*c*. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

*a*. Démontrer que p(S) = 0,934.

*b*. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième)

3. Étude d'une variable aléatoire B.

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

*a*. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

*b*. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

**EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats**

**Asie juin 2007**

On désigne par $a$ un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle ] 0 ; + ∞ [, les solutions de l'équation $E_a : x^a = a^x$.

**I Étude de quelques cas particuliers**

**1.** Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation $E_2$.

**2.** Vérifier que le nombre $a$ est toujours solution de l'équation $E_a$.

**3.** On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation $E_{\mathrm{e}}$.

On note $h$ la fonction définie sur l'intervalle ] 0 ; + ∞ [ par $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.

**a.** **Question de cours :** On rappelle que lorsque $t$ tend vers + ∞, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers + ∞. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

**b.** Déterminer les limites de $h$ en 0 et + ∞.

**c.** Etudier les variations de $h$ sur l'intervalle ] 0 ; + ∞ [.

**d.** Dresser le tableau des variations de $h$ et conclure quant aux solutions de l'équation $E_{\mathrm{e}}$.

**II Résolution de l'équation $E_a$**

**1.** Soit $x$ un réel strictement positif.

Montrer que $x$ est solution de l'équation $E_a$ si et seulement si $x$ est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.

**2.** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle ] 0 ; + ∞ [ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

**a.** Déterminer les limites de $f$ en 0 et +∞. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

**b.** Etudier les variations de $f$ sur l'intervalle ] 0 ; + ∞ [.

**c.** Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.

**d.** Tracer la courbe C représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). (Unité : 2 cm).

**3.** Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions $(P_1)$ et $(P_2)$ suivantes :

$(P_1)$ : si $a \in$ ] 0 ; 1 ], alors $E_a$ admet l'unique solution $a$ ;

$(P_2)$ : si $a \in$ ] 1 ; e [ ∪ ] e ; + ∞ [, alors $E_a$ admet deux solutions $a$ et $b$, l'une appartenant à l'intervalle ] 1 ; e [ et l'autre appartenant à l'intervalle ] e ; + ∞ [.

**CORRECTION**

**EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats**

**1.** VRAI

Si $u$ est une fonction dérivable alors la dérivée de $u^2$ est la fonction $2\,u'\,u$ donc pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin 2x$.

**2.** Par intégration par parties

on pose $u'(t) = f'(t)$ $u(t) = f(t)$

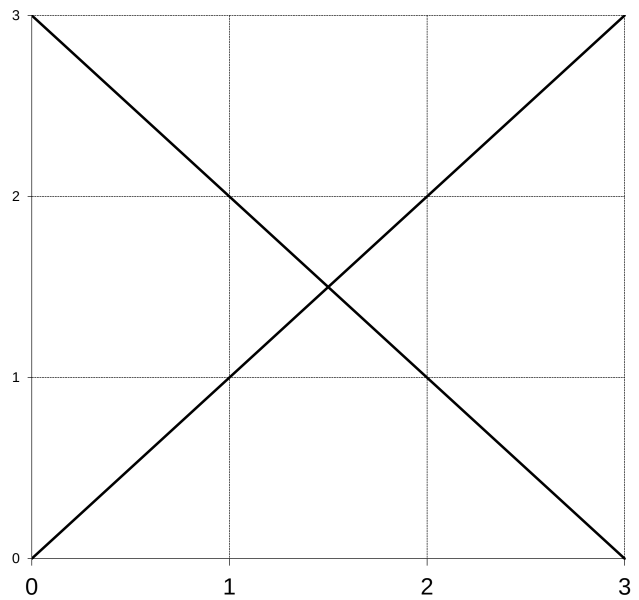
$v(t) = t$ $v'(t) = 1$

$$\int_{-1}^{1} t\, f'(t)\,\mathrm{d}t = [\,t\, f(t)\,]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(1) + f(-1) - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ donc } \int_{-1}^{1} t\, f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ VRAI}$$

**3.** FAUX

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x - 3$ si $0 \le x \le 3$ ; soit la fonction $g$ définie par $g(x) = x$ si $0 \le x \le 3$

f et g sont représentées sur [0 ; 3] par les diagonales du carré de côté 3 unités donc $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$ et $\int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$




de plus il est impossible d'affirmer que, sur [0 ; 3] $f(x) \le g(x)$.

**4.** Soit $f$ la solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ telle que $f(0) = 1$ alors $f'(0) = -2f(0) + 2 = 0$ donc la représentation de $f$ dans un repère du plan, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 0.

**EXERCICE 2 (5 points) Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.**

**1. *a.*** $z_0 = 0$ donc $z_1 = \lambda z_0 + \text{i} = \text{i}$
$z_1 = \text{i}$ donc $z_2 = \lambda z_\text{i} + \text{i} = (\lambda + 1)\,\text{i}$
$z_2 = (\lambda + 1)\,\text{i}$ donc $z_3 = \lambda z_2 + \text{i} = (\lambda^2 + \lambda + 1)\,\text{i}$.

***b.*** $z_0 = 0$ or si $n = 0$, $\lambda^0 = 1$ donc $\dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\text{i} = 0$ donc $z_0 = \dfrac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$

La propriété est vraie pour $n = 0$
montrons qu'elle est héréditaire c'est-à-dire :

pour tout entier $n$ positif ou nul : si $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$ alors $z_{n+1} = \dfrac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$

$z_{n+1} = \lambda z_n + \text{i} = \lambda \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\text{i} + \text{i} = \dfrac{\lambda(\lambda^n - 1) + (\lambda - 1)}{\lambda - 1}\,\text{i}$

$z_{n+1} = \dfrac{\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$ donc $z_{n+1}\ \dfrac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**2. *a.*** Si $\lambda = \text{i}$ alors $z_4 = \dfrac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$ or $\text{i}^2 = -1$ donc $\text{i}^4 = 1$ donc $z_4 = 0$.

***b.*** Pour tout entier naturel $n$, $z_{n+4} = \dfrac{\lambda^{n+4} - 1}{\lambda - 1}\,\text{i} = \dfrac{\lambda^n \times \lambda^4 - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$, or $\lambda = \text{i}$ donc $\lambda^4 = 1$ donc $z_{n+4} = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\text{i} = z_n$

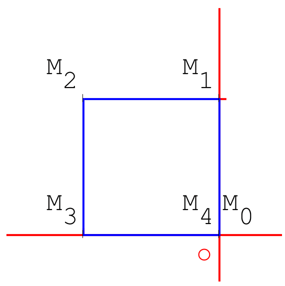
***c.*** Pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \text{i}\, z_n + \text{i}$

Soit la transformation d'écriture complexe : $z' = \text{i}\, z + \text{i}$ soit $z' = e^{\text{i}\frac{\pi}{2}} z + \text{i}$

donc cette transformation est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ telle que $\omega = \text{i}\,\omega + \text{i}$ donc $\omega = \dfrac{\text{i}}{1 - \text{i}} = \dfrac{\text{i}(1 + \text{i})}{(1 - \text{i})(1 + \text{i})} = \dfrac{-1 + \text{i}}{2}$.

$M_{n+1}$ est l'image de $M_n$ par une rotation de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,\text{i}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

***d.***




**3. *a.*** Pour tout entier naturel $n$, $z_{n+k} = \dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1}\,\text{i} = \dfrac{\lambda^n \times \lambda^k - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$,

or $\lambda^k = 1$ donc $z_{n+k} = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\text{i} = z_n$

***b.*** s'il existe un entier naturel $k$ tel que, pour tout entier naturel $n$ on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1}\,\text{i} = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\,\text{i}$

donc $\lambda^{n+k} - 1 = \lambda^n - 1$
soit $\lambda^{n+k} = \lambda^n$ or $\lambda^n \neq 0$ donc $\lambda^k = 1$.

**EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier**

1. *a.* $s$ est une similitude directe donc $a$ une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$

$s$(O) = A donc $10 = a \times 0 + b$ donc $b = 10$, $s$ a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + 10$

$s$(B) = O donc $0 = a \times 5\,\mathrm{i} + 10$ donc $5\,\mathrm{i}\,a = -10$ donc $a = -\dfrac{10}{5\,\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{i}$

$s$ a pour écriture complexe $z' = 2\,\mathrm{i}\,z + 10$

*b.* $a = 2\,\mathrm{i}$ donc le rapport de $s$ est $|\,a\,| = 2$ et son angle est $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2}$

$z' = z \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{i}\,z + 10 \Leftrightarrow z\,(1 - 2\,\mathrm{i}) = 10 \Leftrightarrow z = \dfrac{10}{1-2\,\mathrm{i}} = \dfrac{10\,(1+2\,\mathrm{i})}{5}$

$s$ admet pour centre le point $\Omega$ d'affixe $(2 + 4\,\mathrm{i})$

*c.* $s$(B) = O et $s$(O) = A donc $s \circ s$ (B) = A

$s \circ s$ est une similitude directe de centre $\Omega$ de rapport 4 (le produit des rapports) et d'angle $\pi$ (la somme des angles)

donc $(\overrightarrow{\Omega B}\,;\overrightarrow{\Omega A}) = \pi$ et $\Omega A = 4\,\Omega B$, $\Omega$ est un point du segment [AB]

$s$(B) = O donc $(\overrightarrow{\Omega B}\,;\overrightarrow{\Omega O}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\Omega$ est le pied de hauteur issue de O du triangle OAB.

2. *a.* Les coordonnées de A et de B' vérifient l'équation de D donc A' et B' sont deux points de D

Un vecteur directeur de D est le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (2 ; 1)

$\overrightarrow{AA'}$ a pour affixe $8 + 4\,\mathrm{i} - 10$ soit $-2 + 4\,\mathrm{i}$

$\overrightarrow{BB'}$ a pour affixe $2 + \mathrm{i} - 5\,\mathrm{i}$ soit $2 - 4\,\mathrm{i}$

$\overrightarrow{AA'}\,.\,\vec{w} = -2 \times 2 + 4 \times 1 = 0$ donc la droite (AA') est perpendiculaire à D donc le point A′ est le projeté orthogonal du point A sur la droite D.

$\overrightarrow{BB'}\,.\,\vec{w} = 2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$ donc la droite (BB') est perpendiculaire à D donc le point B′ est le projeté orthogonal du point B sur la droite D.

*b.* $s$ a pour écriture complexe $z' = 2\,\mathrm{i}\,z + 10$

$2\,\mathrm{i}\,z_{B'} + 10 = 2\,\mathrm{i}\,(2 + \mathrm{i}) + 10 = 4\,\mathrm{i} - 2 + 10 = 8 + 4\,\mathrm{i} = z_{A'}$ donc $s$(B′) =A′.

*c.* $s$(B′) =A′ donc $(\overrightarrow{\Omega B'}\,;\overrightarrow{\Omega A'}) = \dfrac{\pi}{2}$, le triangle Ω A' B' est rectangle en Ω donc le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′].

**II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes**

1. *a.* $s$(O) = A et $s$(B) = O donc l'angle de $s$ est une mesure de $(\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{AO})$

$(\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{AO}) = \pi + (\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OA})$ donc $(\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{AO}) = \pi - (\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB})$

$(\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{AO}) = \pi - \dfrac{\pi}{2}$ donc l'angle de $s$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

*b.* $s$(O) = A donc $(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega O}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle ΩAO est rectangle en Ω donc Ω appartient au cercle de diamètre [OA].

Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB] donc le triangle ΩBO est rectangle en Ω, (ΩO) est perpendiculaire à (ΩB) et à (ΩA) donc les points Ω, A, B sont alignés.

$\Omega \in$ (AB) et (ΩO) est perpendiculaire à (AB) donc Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. *a.* L'image de la droite (B'B) par la similitude $s$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, est la droite perpendiculaire à (BB') passant par $s$(B) or $s$(B) = O donc l'image de la droite (B'B) par $s$ est la perpendiculaire en O à (BB') donc est la droite D.

L'image de la droite D par la similitude $s$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, est la droite perpendiculaire à D passant par $s$(O) or $s$(O) = A donc l'image de la droite D par $s$ est la perpendiculaire en A à D donc est la droite (AA').

*b.* B' appartient à la droite D et à la droite (BB') donc $s$(B') est le point d'intersection de leurs images D et (AA') par $s$ donc $s$(B') = A'.

*c.* $s$(B') = A' donc $(\overrightarrow{\Omega B'}\,;\overrightarrow{\Omega A'}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle ΩA'B' est rectangle en Ω donc le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′].

**EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats**

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

*a*. 92 % des jouets sont sans défaut de finition donc $p(\text{F}) = 0{,}92$

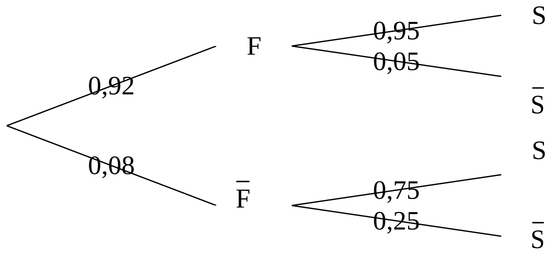
parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ; donc $p_{\text{F}}(\text{S}) = 0{,}95$

2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles donc $p(\text{F} \cap \text{S}) = 0{,}02$

| | F | $\overline{\text{F}}$ | Total |
|---|---|---|---|
| S | 0,95 × 92 = 87,4 | 6 | 93,4 |
| $\overline{\text{S}}$ | 4,6 | 2 | 6,6 |
| Total | 92 | 8 | 100 |

*b*. $p_{\overline{\text{F}}}(\overline{\text{S}}) = \dfrac{p(\overline{\text{S}} \cap \overline{\text{F}})}{p(\overline{\text{F}})} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

*c*. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.




2. Calcul de probabilités.

*a*. $p(\text{S}) = p(\text{S} \cap \text{F}) + p(\text{S} \cap \overline{\text{F}}) = 0{,}92 \times 0{,}95 + 0{,}08 \times 0{,}75 = 0{,}934$.

*b*. d'après le tableau : $p_{\text{S}}(\text{F}) = \dfrac{87{,}4}{93{,}4}$ soit environ 0,936

avec l'arbre de choix : $p_{\text{S}}(\text{F}) = \dfrac{p(\text{S} \cap \text{F})}{p(\text{S})} = \dfrac{0{,}92 \times 0{,}95}{0{,}934}$ soit environ 0,936

3. Étude d'une variable aléatoire B.

*a*. la variable aléatoire B prend les valeurs 0 ; 5 ; 10

$p(\text{B} = 0) = p(\overline{\text{S}}) = 1 - p(\text{S}) = 1 - 0{,}934 = 0{,}066$

$p(\text{B} = 10) = p(\text{S} \cap \text{F}) = 0{,}92 \times 0{,}95 = 0{,}874$

$p(\text{B} = 5) = 1 - p(\text{B} = 0) - p(\text{B} = 10) = 0{,}06$

| $b$ | 0 | 5 | 10 | Total |
|---|---|---|---|---|
| $p(\text{B} = b)$ | 0,066 | 0,06 | 0,874 | 1 |
| $b\,p(\text{B} = b)$ | 0 | 0,3 | 8,74 | 9,04 |

*b*. $\text{E(B)} = 0 \times 0{,}066 + 10 \times 0{,}874 + 5 \times 0{,}06 = 9{,}04$

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire.

On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles *a* deux issues :

- succès : le jouet a subi avec succès le test de solidité ($p = 0{,}934$)
- échec : le jouet n'a pas subi avec succès le test de solidité ($q = 0{,}066$)

donc la variable aléatoire X égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,934).

$p(\text{X} \geq 8) = p(\text{X} = 8) + p(\text{X} = 9) + p(\text{X} = 10) = 0{,}976$

**EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats**

**I Étude de quelques cas particuliers**

**1.** $E_2 : x^2 = 2^x$ ;

si $x = 2$ alors $2^2 = 2^2$ donc 2 est solution de l'équation $E_2$.

si $x = 4$ alors $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc $2^4 = 4^2$ donc 4 est solution de l'équation $E_2$.

**2.** $E_a : x^a = a^x$ or si $x = a$ alors $x^a = a^a$ et $a^x = a^a$ donc le nombre $a$ est toujours solution de l'équation $E_a$.

**3. *a.*** $x$ tend vers $+\infty$ donc $x > 0$, soit $t = \ln x$ alors $x = \mathrm{e}^t$ alors $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t} = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} t = +\infty$ $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

***b.*** $h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}\dfrac{\ln x}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \mathrm{e}\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$.

***c.*** $h$ est définie dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $h'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{x} = \dfrac{x - \mathrm{e}}{x}$

si $x > \mathrm{e}$, alors $x - \mathrm{e} > 0$ donc $h'(x) > 0$, si $x = \mathrm{e}$ alors $h'(\mathrm{e}) = 0$

$h$ est strictement croissante sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$

si $0 < x < \mathrm{e}$ alors $x - \mathrm{e} < 0$ et $h'(x) < 0$, $h$ est strictement décroissante sur $]\,0\,;\mathrm{e}\,[$.

***d.***

| $x$ | 0 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | – | 0 | + | |
| $h$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

$h$ est strictement décroissante sur $]\,0\,;\mathrm{e}\,[$ et strictement croissante sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$ donc $h$ s'annule une seule fois en e.

**II Résolution de l'équation $E_a$**

**1.** $x$ est solution de l'équation $E_a \Leftrightarrow x^a = a^x \Leftrightarrow \ln(x^a) = \ln(a^x)$

$\Leftrightarrow a \ln x = x \ln a \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$

**2. *a.*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe.

$f(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe.

***b.*** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x)$ a le même signe que $1 - \ln x$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}$

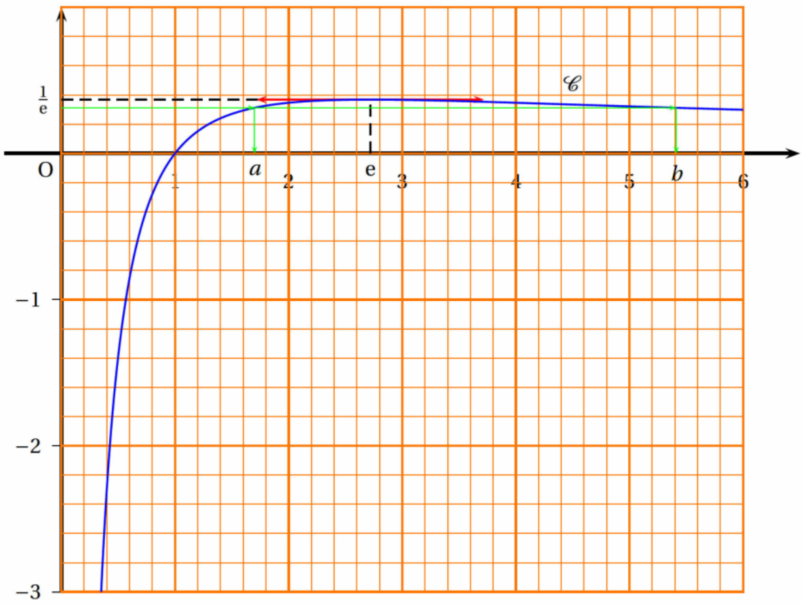
$f'(\mathrm{e}) = 0$

$f$ est strictement croissante sur $]\,0\,;\mathrm{e}\,[$ et strictement décroissante sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$.

***c.***

| $x$ | 0 | | 1 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | – | | 0 | + | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $\mathrm{e}^{-1}$ | ↘ | 0 |

**d.**




**3.** La fonction $f$ est définie continue strictement croissante sur $]\,0\,;\,1\,]$, $f\,(]\,0\,;\,1\,])=\,]-\infty\,;\,0\,]$
si $a\in\,]\,0\,;\,1\,]$, $f\,(a)\in\,]-\infty\,;\,0\,]$
donc l'équation $f\,(x)=f\,(a)$ admet une seule solution a sur $]\,0\,;\,1\,]$.
$(P_1)$ : si $a\in\,]\,0\,;\,1\,]$, alors $E_a$ admet l'unique solution a ;

si $a\in\,]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, $f\,(a)\in\,]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,[$
La fonction $f$ est définie continue strictement croissante sur $]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[$, $f\,(]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[)=\,]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,[$
si $a\in\,]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, $f\,(a)\in\,]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,[$
donc l'équation $f\,(x)=f\,(a)$ admet une seule solution $\alpha$ sur $]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[$

La fonction $f$ est définie continue strictement croissante sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, $f\,(]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[)=\,]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,[$
si $a\in\,]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, $f\,(a)\in\,]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,[$
donc l'équation $f\,(x)=f\,(a)$ admet une seule solution $\beta$ sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$.
$a$ est solution de $f\,(x)=f\,(a)$ donc : si $a\in\,]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[)$ $a=\alpha$ ou si $a\in\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, $a=\beta$
$(P_2)$ : si $a\in\,]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, alors $E_a$ admet deux solutions $a$ et $b$, l'une appartenant à l'intervalle $]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$.