ENONCE

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-3\}$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	10	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

On sait, de plus, que pour tout réel $x \neq -3$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $a\,x^2 + b + \dfrac{c}{x+d}$ où a, b, c, d sont quatre réels (avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$).

1. *a*. À l'aide des indications fournies par le tableau, déterminer la fonction f.

   b. Démontrer qu'il existe un réel e tel que : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2\,(x+e)}{(x+3)^2}$

   c. Justifier toutes les informations du tableau de variation de f.

2. Soit C la courbe représentative de f dans un repère du plan et P la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ dans le même repère.

   a. Prouver que P coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on déterminera.
   b. Prouver que C coupe l'axe des abscisses en seul point A. On déterminera une valeur approchée de l'abscisse de A à 10^{-2} près.
   c. Étudier la position relative des courbes C et P.
   d. Prouver que P est une courbe asymptote de C en $-\infty$ et en $+\infty$.
   e. Construire P et C.
   f. Résoudre algébriquement l'inéquation : $-0{,}1 < f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) < 0{,}1$. Interpréter graphiquement.

CORRECTION

1\. *a*. D'après le tableau de variation, on a entre autre que $x \neq -3$ donc $d = 3$, de plus :

$f(-4) = 10$ et $f'(-4) = 0$; $f(-1) = -\dfrac{7}{2}$ et $f'(-1) = 0$

$$f'(x) = 2\,a\,x - \frac{c}{(x+3)^2} \text{ donc } \begin{cases} f(-4) = 16\,a + b - c = 10 \\ f'(-4) = -8\,a - c = 0 \\ f(-1) = a + b + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{7}{2} \\ f'(-1) = -2\,a - \dfrac{c}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16\,a + b - c = 10 \\ c = -8\,a \\ a + b - 4\,a = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24\,a + b = 10 \\ c = -8\,a \\ -3\,a + b = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24\,a + b + 3\,a - b = 10 + \dfrac{7}{2} \\ b = 10 - 24\,a \\ c = -8\,a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases} \text{ donc } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{4}{x+3}$$

1\. *b*. $f'(x) = x + \dfrac{4}{(x+3)^2} = \dfrac{x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4}{(x+3)^2}$

$x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = (x^2 + 2\,x + 1)\,(x + e)$
$x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = x^3 + (e + 2)\,x^2 + (2\,e + 1)\,x + e$
donc $e + 2 = 6$, $2\,e + 1 = 9$ et $e = 4$
donc $x^3 + 6\,x^2 + 9\,x + 4 = (x^2 + 2\,x + 1)\,(x + 4)$

$f'(x) = \dfrac{(x+1)^2\,(x+4)}{(x+3)^2}$

1\. *c*. Un carré est toujours positif ou nul donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 4$, et s'annule pour $x = -1$

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

d'où le sens de variation de f
Il suffit ensuite de déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{4}{x+3}$ or $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2}x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{4}{x+3} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{4}{x+3} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

2. *a* P coupe l'axe des abscisses quand $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ soit si $x^2 = 4$ donc si $x = 2$ ou $x = -2$ donc P coupe l'axe des abscisses en deux points $A_1(-2 ; 0)$ et $A_2(2 ; 0)$.

2. *b* f est décroissante sur $]-\infty ; -4]$ et croissante sur $[4 ; -3[$ donc f admet un minimum en -4; $f(-4) = 10$ donc pour tout x de $]-\infty ; -3[$, $f(x) \geq 10$ donc C ne coupe pas l'axe des abscisses sur $]-\infty ; -3[$.
f est définie continue, strictement croissante sur $]-3 ; +\infty[$, $f(]-3 ; +\infty[) =]-\infty ; +\infty[$, donc $0 \in f(]-3 ; +\infty[)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-3 ; +\infty[$.
La courbe C coupe donc l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α sur $]-3 ; +\infty[$.

$f(2{,}34) < 0$ et $f(2{,}35) > 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]-3 ; +\infty[$ donc f s'annule sur $]2{,}34 ; 2{,}35[$ donc $2{,}34 < \alpha < 2{,}35$

2. *c.* $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\frac{4}{x+3}$ donc si $x > -3$, $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) < 0$ donc C est en dessous de P sur $]-3 ; +\infty[$

si $x < -3$, $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) > 0$ donc C est au dessus de P sur $]-\infty ; -3[$.

$f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\frac{4}{x+3}$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x+3} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = 0$ donc P est asymptote à C en $+\infty$ et $-\infty$.

2. *f.* $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\frac{4}{x+3}$, on doit donc résoudre $-0{,}1 < -\frac{4}{x+3} < 0{,}1$ soit en multipliant par -1, il suffit donc de résoudre $-0{,}1 < \frac{4}{x+3} < 0{,}1$. On ne peut travailler qu'avec des nombres de même signe donc deux cas :

<u>Cas 1 :</u> $0 \leq \frac{4}{x+3} < 0{,}1$ donc en passant aux inverses : $\frac{x+3}{4} > 10$ soit $x + 3 > 40$ donc $x > 37$

<u>Cas 2 :</u> $-0{,}1 < \frac{4}{x+3} < 0$ donc en passant aux inverses : $\frac{x+3}{4} < -10$ soit $x + 3 < -40$ donc $x < -43$

Si $x \in]-\infty ; -43[\cup]37 ; +\infty[$, l'écart entre la courbe et la parabole est inférieur à 0,1.