ANTILLES–GUYANE SEPTEMBRE 2005

Soit f la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 + x}$.

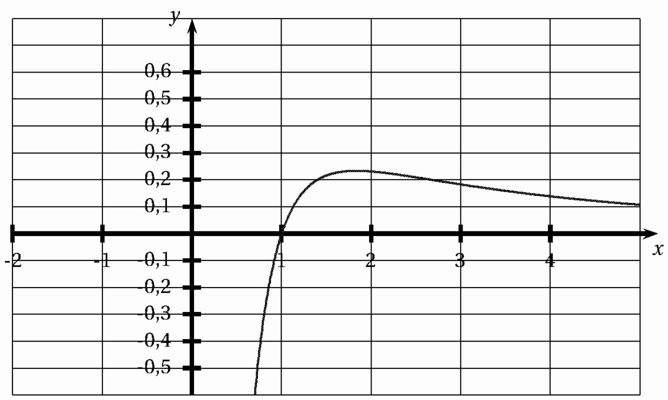
1. Montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$.

2. *a.* Calculer $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

(on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).

b. En déduire un encadrement de $K = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$.

3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ et on note A son aire.



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 *b*, donner un encadrement de A en cm².

CORRECTION

1. $f(x) - \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2(x+1)}\ln x$

si $x > 1$, $\ln x > 0$, $x - 1 > 0$ et $x^2(x + 1) > 0$ donc $f(x) > \dfrac{\ln x}{x^2}$

$f(x) - \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1-x}{x(x+1)}\ln x$

si $x > 1$, $\ln x > 0$, $1 - x < 0$ et $x(x + 1) > 0$ donc $f(x) < \dfrac{\ln x}{x}$

a fortiori : $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$.

2. *a*. $I = \left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_2^4 = \dfrac{3}{2}(\ln 2)^2$

$J = \left[\dfrac{-1}{x}(\ln x)\right]_2^4 - \displaystyle\int_2^4 \frac{-1}{x^2}\,dx$

$J = \left[\dfrac{-1}{x}(\ln x)\right]_2^4 - \left[\dfrac{1}{x}\right]_2^4 = \dfrac{-1}{4}\ln 4 + \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}$

$J = \dfrac{1}{4}$

2. *b*. les fonctions f, $x \to \dfrac{\ln x}{x^2}$ et $x \to \dfrac{\ln x}{x}$ sont continues sur [2 ; 4] donc $J \leq K \leq I$ soit $\dfrac{1}{4} \leq K \leq \dfrac{3}{2}(\ln 2)^2$

2. *b*. L'aire demandée est égale à K

Les unités graphiques sont 1 cm pour 1 unité en abscisse et 4 cm pour 1 unité en ordonnée donc 1 *u.a.* = 1×4 cm²

donc $1 \leq A \leq 6(\ln 2)^2$ en cm²