France septembre 2005

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0$ (modulo 6).

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'*y a* aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6).

D : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6) ou $x \equiv 5$ (modulo 6).

2. On se propose de résoudre l'équation : E) : $24\,x + 34\,y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (34\,k - 7\,;\,5 - 24\,k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (17\,k - 7\,;\,5 - 12\,k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (-7\,k\,;\,5\,k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,7892^{\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4$ (modulo 17) et $p \equiv 0$ (modulo 17).

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4$ (modulo 17).

D : $p \equiv 1$ (modulo 17).

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}\,a}{1 - \mathrm{i}}$ B : $z - a = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$ C : $a - z = \mathrm{i}\,(b - z)$ D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

CORRECTION

1. A : FAUX : si $x = 5$ alors $5^2 - 5 + 4 = 24$ donc $x = 5$ est solution de $x^2 - x + 4 \equiv 0$ (modulo 6).

B : FAUX : $x = 5$ est solution

C : FAUX : $x = 5$ est solution et 5 n'est pas congru à 2 modulo 6

D : VRAI.

2. $x = -7$ et $y = -5$ or $(-7) \times 24 + (-5) \times 34 = -168 + 170 = 2$ donc $(-7\,;\,-5)$ vérifie la relation

Par différence membre à membre : $\begin{cases} 24\,x + 34\,y = 2 \\ 24 \times (-7) + 17 \times (-7) = 2 \end{cases}$ on obtient $24\,(x + 7) + 34\,(y + 5) = 0$

soit $12\,(x + 7) = -17\,(y + 5)$, 12 et 17 sont premiers entre eux donc 17 divise $12\,(x + 7)$

Il existe un entier relatif k tel que $x + 7 = 17\,k$

En remplaçant dans $12\,(x + 7) = -17\,(y + 5)$ alors $y + 5 = -12\,k$

Vérification : si $x + 7 = 17\,k$, et $y + 5 = -12\,k$ alors $24\,(17\,k - 7) + 34\,(5 - 12\,k) = 24 \times 17\,k - 7 \times 24 - 34 \times 12\,k + 5 \times 34 = 2$

A : FAUX : Les solutions de (E) de la forme $24\,x + 34\,y = 2$ correspondent aux valeurs paires du paramètre.

B : FAUX : $(-7\,;\,5)$ est solution

C : VRAI

D : FAUX : si $k = 0$, $x = 0$ et $y = 0$ ne vérifient pas la relation.

3. $1789 = 17 \times 105 + 4$ donc $n \equiv 4$ (modulo 17) donc $p \equiv 4^{2\,005}$ (modulo 17)

$4^2 \equiv -1$ modulo 17 donc $4^4 \equiv 1$ (modulo 17) or $2005 = 4 \times 501 + 1$ donc $4^{2005} \equiv 4$ (modulo 17) donc $p \equiv 4$ (modulo 17)

A : FAUX B : FAUX C : VRAI D : FAUX

4. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point A est l'image de B dans la rotation de centre M d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ soit si et seulement si $a - z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(b - z)$ or $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$

Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que : $a - z = \mathrm{i}\,(b - z)$
A : FAUX

B : FAUX M est l'image de B dans la similitude directe de centre A d'angle $\frac{\pi}{4}$ de rapport $\sqrt{2}$ donc $z - a = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$

C : VRAI

D : FAUX une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ correspond à une forme $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$

5. La composée de 3 similitudes directes est une similitude directe d'angle la somme des angles des similitudes donc $h \circ g \circ f$ est une similitude directe d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi \equiv 0$ (modulo 2π) donc est une homothétie de rapport positif ou une translation

Le rapport de $h \circ g \circ f$ est le produit des rapports donc égal à $2 \times \frac{1}{2} \times 1 = 1$ donc $h \circ g \circ f$ est une translation.

A : FAUX
B : FAUX
C : FAUX
D : VRAI f est une similitude directe de centre A donc $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$
$h \circ g \circ f(\mathrm{A}) = h \circ g(\mathrm{A})$
g est une similitude directe de centre A donc $g(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ donc $h \circ g \circ f(\mathrm{A}) = h(\mathrm{A})$
I est le milieu du segment [AB] et h la symétrie centrale de centre I donc $h(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$
$h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.