L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right)$ (*)

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum.
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{7}$.

2. *a*. Soit n un entier naturel quelconque.
Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation ($\star$) que la limite ℓ de cette suite est telle que : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$. Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par : $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^{\,2}$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

b. Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0

Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$
	    Affecter à d la valeur $0{,}5\, d^2$
	    Affecter à n la valeur $n + 1$

Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

CORRECTION

1. $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 7}{2x^2}$

$x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$.

x	0		$\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		
f		↘	$\sqrt{7}$	↗	

f est décroissante sur $]\,0\,;\sqrt{7}\,]$ et croissante sur $[\,\sqrt{7}\,;+\infty\,[$ donc f admet un minimum en $\sqrt{7}$ et ce minimum est égal à $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ donc pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \sqrt{7}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{7}$.

$u_0 = 3$ donc $u_0 \geq \sqrt{7}$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, si $u_n \geq \sqrt{7}$ alors $u_{n+1} \geq \sqrt{7}$.

$u_n \geq \sqrt{7}$ alors $f(u_n) \geq \sqrt{7}$ donc $u_{n+1} \geq \sqrt{7}$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{7}$.

2. *a*. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(-u_n + \frac{7}{u_n}\right) = \frac{7 - u_n^{\,2}}{2u_n}$

$7 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$ or pour tout entier naturel n, $u_n > \sqrt{7}$ donc $7 - u_n^{\,2} < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

b. la suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{7}$ donc est convergente et soit ℓ sa limite alors $\ell \geq \sqrt{7}$.

c. $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$ donc $2x^2 = x^2 + 7 \Leftrightarrow x^2 = 7$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

ℓ est solution de $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$ et $\ell \geq \sqrt{7}$ donc $\ell = \sqrt{7}$.

3. pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - \sqrt{7}$

$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n} - 2\sqrt{7}\right) = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{7} + 7}{2u_n}$$

donc $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$.

4. *a.* Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

$d_0 = 1$ et $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7}$ or $3 - \sqrt{7} \approx 0{,}35$ donc $0 \leq u_0 - \sqrt{7} \leq d_0$

La propriété est vérifiée pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, si $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$ alors $u_{n+1} - \sqrt{7} \leq d_{n+1}$

$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{7})^2$$

$0 \leq u_n - \sqrt{7} \leq d_n$ donc $0 \leq (u_n - \sqrt{7})^2 \leq d_n^2$

$u_{n+1} - \sqrt{7} \leq \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{2} d_n^2$ donc $u_{n+1} - \sqrt{7} \leq \frac{1}{u_n} d_{n+1}$

$\sqrt{7} \leq u_n$ donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$ or $\frac{1}{\sqrt{7}} \leq 1$ donc $\frac{1}{u_n} \leq 1$.

pour tout n, $d_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - \sqrt{7} \leq \frac{1}{u_n} d_{n+1} \leq d_{n+1}$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

b.

n	d	test	d	n	algorithme
0	d_0	$d_0 > 10^{-9}$	$0{,}5\,d_0^2$.	1	l'algorithme continue
1	d_1	$d_1 > 10^{-9}$	$0{,}5\,d_1^2$	2	l'algorithme continue
2	d_{20}	$d_2 > 10^{-9}$	$0{,}5\,d_2^2$	3	l'algorithme continue
3	d_3	$d_3 > 10^{-9}$	$0{,}5\,d_3^2$	4	l'algorithme continue
4	d_4	$d_4 > 10^{-9}$	$0{,}5\,d_4^2$	5	l'algorithme continue
5	d_5	$d_5 < 10^{-9}$			l'algorithme s'arrête

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5, alors $d_5 \leq 10^{-9}$

pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n - \sqrt{7} \leq d_n$

donc pour $n = 5$, $0 \leq u_5 - \sqrt{7} \leq d_5 \leq 10^{-9}$

u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.