Soit f la fonction définie par $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$

On note C sa courbe représentative dans un repère donné

1. *a.* Déterminer D_f, ensemble de définition de la fonction f.

b. Donner une écriture de $f(x)$ sans valeur absolue (on distinguera deux cas)

c. Etudier les limites de f aux bornes des intervalles de D_f.

2. *a.* Exprimer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles de D_f.

b. Dresser le tableau de variations de f

3. *a.* Déterminer les équations des droites Δ et Δ', asymptotes obliques à C respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Etudier la position de C par rapport à Δ sur $]-1 ; +\infty[$ et de C par rapport à Δ' sur $]-\infty ; -1[$

c. Trouver une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 0.
Etudier les positions relatives de C et T sur $]-1 ; 1[$

d. Tracer T, Δ, Δ' puis la courbe C

4. *a.* Existe-t-il un réel A tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à A, on ait : $-0{,}01 \leq f(x) - (x+1) \leq 0{,}01$? Justifier

b. Déterminer le plus petit réel A possible. On donnera une valeur arrondie au centième.

CORRECTION

1. *a.* f est définie pour x réel tel que $x^2 - 1 \neq 0$ donc $x \neq 1$ et $x \neq -1$ donc $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b. Si $x > -1$ alors $x + 1 > 0$ donc $|x+1| = x+1$ donc sur $]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1}$

Si $x < -1$ alors $x + 1 < 0$ donc $|x+1| = -(x+1) = -x-1$ donc sur $]-\infty ; -1[$, $f(x) = -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1}$

c. Sur $]-\infty ; -1[$, $f(x) = -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1}$

$\dfrac{x}{x^2-1}$ est une fraction rationnelle donc la limite en $-\infty$ de $\dfrac{x}{x^2-1}$ est celle de ses termes de plus haut degré donc est la même que celle de $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x-1)} \times \frac{1}{(x+1)}$$

$\lim\limits_{x\to-1^-} x+1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to-1^-} -x-1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

sur $]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1}$

$\dfrac{x}{x^2-1}$ est une fraction rationnelle donc la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x}{x^2-1}$ est celle de ses termes de plus haut degré donc est la même que celle de $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x-1)} \times \frac{1}{(x+1)}$$

$\lim\limits_{x\to-1^+} x+1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to-1^+} x+1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x+1)} \times \frac{1}{(x-1)}$$

$\lim\limits_{x\to1^-} x-1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to1^-} x+1 = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to 1^+} x+1 = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

2. *a.* $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = x^2-1 & v'(x) = 2x \end{cases}$ donc la dérivée de $\dfrac{x}{x^2-1}$ est $\dfrac{1(x^2-1)-2x\times x}{(x^2-1)^2}$ soit $\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

Sur $]-\infty\,;-1[$, $f(x) = -x-1+\dfrac{x}{x^2-1}$ donc sur $]-\infty\,;-1[$, $f'(x) = -1+\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-[(x^2-1)^2+x^2+1]}{(x^2-1)^2}$

$(x^2-1)^2+x^2+1$ est une somme de termes positifs donc, sur $]-\infty\,;-1[$, $(x^2-1)^2+x^2+1>0$ donc sur $]-\infty\,;-1[$, $f'(x)<0$

Sur $]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $f(x) = x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$

sur $]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $f'(x) = 1+\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{(x^2-1)^2-x^2-1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-2x^2+1-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

sur $]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

Sur $]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $f'(x)$ s'annule en 0 et a le même signe que x^2-3

$x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

donc

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		+	0	–	0	+	

d'où le signe de $f'(x)$ sur $]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$,

x	-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	–	‖	–	0	+	

d'où le signe de $f'(x)$ sur D_f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		–	‖		0	–	‖	–	0	+	

b.

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		–	‖	–	0	–	‖	–	0	+	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+1$	↗	$+\infty$

3. *a.* sur $]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $f(x) = x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$

$f(x)-(x+1) = \dfrac{x}{x^2-1}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = 0$

La droite Δ d'équation $y = x+1$ est asymptote en $+\infty$ à C_f.

Sur $]-\infty\,;-1[$, $f(x) = -x-1+\dfrac{x}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$ or $f(x)-(-x-1) = \dfrac{x}{x^2-1}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x-1) = 0$

La droite Δ' d'équation $y = -x-1$ est asymptote en $-\infty$ à C_f.

b. sur $]-1\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$, $f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$ et sur $]-\infty\,;-1\,[$, $f(x)-(-x-1)=\dfrac{x}{x^2-1}$ donc la position relative de la courbe et de ses asymptotes dépend du signe de $\dfrac{x}{x^2-1}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2-1		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$\dfrac{x}{x^2-1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

sur $]-1\,;+\infty\,[$, $\dfrac{x}{x^2-1}<0$ donc $f(x)-(-x-1)<0$ donc C_f est en dessous de Δ' sur $]-1\,;+\infty\,[$,

sur $]-1\,;0\,[$, $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ donc $f(x)-(x+1)>0$ donc C_f est au dessus de Δ sur $]-1\,;0\,[$,

Pour $x=0$, $f(x)-(x+1)=0$ donc C_f et Δ se coupent au point d'abscisse 0

sur $]\,0\,;1\,[$, $\dfrac{x}{x^2-1}<0$ donc $f(x)-(x+1)<0$ donc C_f est en dessous de Δ sur $]\,0\,;1\,[$,

sur $]\,1\,;+\infty\,[$, $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ donc $f(x)-(x+1)>0$ donc C_f est au dessus de Δ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

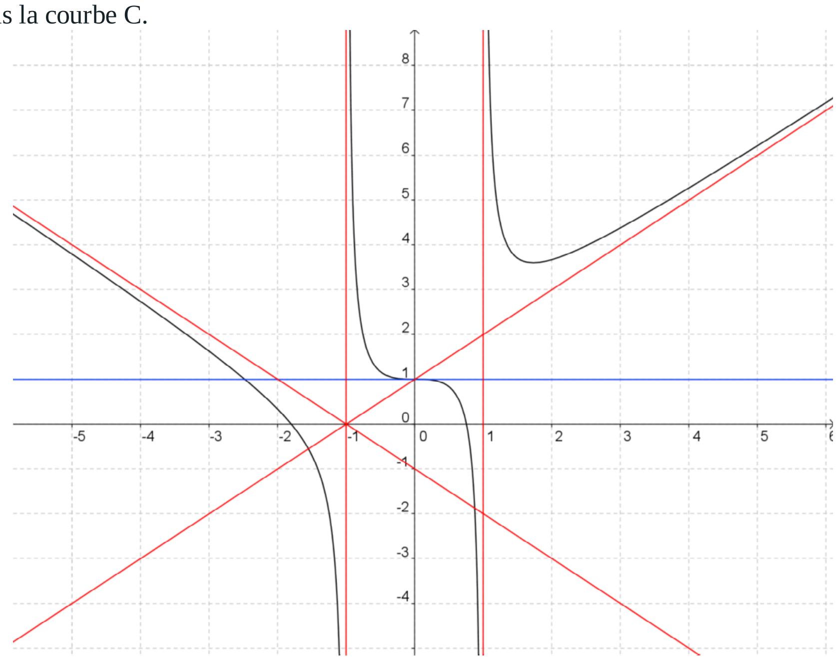
c. $f(0)=1$ et $f'(0)=0$ donc la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y=1$

sur $]-1\,;1\,[$, $f(x)-1=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-1=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ donc $f(x)-1=x\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

x	-1		0		1
x^3	‖	$-$	0	$+$	‖
x^2-1	‖	$-$		$-$	‖
$\dfrac{x^3}{x^2-1}$	‖	$+$	0	$-$	‖

donc C_f est au dessus de T sur $]-1\,;0\,]$ et en dessous sur $[\,0\,;1\,[$.

d. Tracer T, Δ, Δ' puis la courbe C.



4. *a.* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$, donc d'après la définition de la limite nulle en $+\infty$ d'une fonction, il existe un réel A tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à A, on ait : $-0{,}01\le f(x)-(x+1)\le 0{,}01$

b. x tend vers $+\infty$ donc on peut se limiter à $x > 1$, de plus sur $]1\,;+\infty[$, $f(x) - (x+1) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Il faut donc déterminer les solutions de $-0{,}01 \leq \dfrac{x}{x^2-1} \leq 0{,}01$

Si $x > 1$ alors $x^2 - 1 > 0$ donc $-0{,}01\,(x^2-1) \leq x \leq 0{,}01\,(x^2-1)$
soit $-(x^2-1) \leq 100\,x \leq x^2-1$
$100\,x \leq x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 100\,x - 1 \geq 0$

$\Delta = 100^2 + 4 = 10\,004 = 4 \times 2\,501$ donc $x_1 = \dfrac{100+\sqrt{10\,004}}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{100-\sqrt{10\,004}}{2}$

soit $x_1 = 50 + \sqrt{2\,501}$ ou $x_2 = 50 - \sqrt{2\,501}$

$x^2 - 100\,x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,;x_2] \cup [x_1\,;+\infty[$.

de même $-(x^2-1) \leq 100\,x \Leftrightarrow x^2 + 100\,x - 1 \geq 0$

$\Delta = 100^2 + 4 = 10\,004 = 4 \times 2\,501$ donc $x'_1 = \dfrac{-100+\sqrt{10\,004}}{2}$ ou $x'_2 = \dfrac{-100-\sqrt{10\,004}}{2}$

soit $x'_1 = -50 + \sqrt{2\,501}$ ou $x_2 = -50 - \sqrt{2\,501}$

$x^2 + 100\,x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,;x'_2] \cup [x'_1\,;+\infty[$.
$x'_1 < x_1$ et $x'_2 < x_2$ donc $-(x^2-1) \leq 100\,x \leq x^2 - 1 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,;x'_2] \cup [x_1\,;+\infty[$.

Sur $]1\,;+\infty[$, $-0{,}01 \leq \dfrac{x}{x^2-1} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow x \in [x_1\,;+\infty[$.

$A = 50 + \sqrt{2\,501}$ soit $A \approx 100{,}01$