1. Démontrer que pour tout entier q, on a : $q^{n+1} - 1 = (1 + q + q^2 + ... + q^n) (q - 1)$
2. Soit a un entier différent de 1

a. Démontrer que $a^{18} - 1$ est divisible par $a - 1$

b. Démontrer que $a^{18} - 1$ est divisible par $a^2 - 1$

c. Démontrer que $a^{18} - 1$ est divisible par $a^6 - 1$

3. Soit a un entier différent de 1, n un entier supérieur ou égal à 1 et d un diviseur de n.
Démontrer que $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.

CORRECTION

1. En développant :

$$(1 + q + q^2 + ... + q^n) (q - 1) = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} + q^{n+1} - 1 - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots \cancel{q^n}$$

donc $(1 + q + q^2 + ... + q^n) (q - 1) = q^{n+1} - 1$

2. Soit a un entier différent de 1

a. En appliquant la relation précédente à $q = a$ et $n = 17$: $a^{18} - 1 = (a - 1) (1 + a + \dots + a^{17})$

a est un entier naturel donc $1 + a + \dots + a^{17}$ est un entier naturel, $a - 1$ est un entier naturel non nul donc $a^{18} - 1$ est divisible par $a - 1$.

b. En appliquant la relation initiale à $q = a^2$ et $n = 8$: $(a^2)^9 - 1 = (a^2 - 1) (1 + a^2 + \dots + (a^2)^8)$

soit $a^{18} - 1 = (a^2 - 1) (1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{16})$

a est un entier naturel donc $1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{16}$ est un entier naturel, $a^2 - 1$ est un entier naturel non nul donc $a^{18} - 1$ est divisible par $a^2 - 1$.

c. En appliquant la relation initiale à $q = a^6$ et $n = 2$: $(a^6)^3 - 1 = (a^6 - 1) (1 + a^6 + (a^6)^2)$

soit $a^{18} - 1 = (a^6 - 1) (1 + a^6 + a^{12})$

a est un entier naturel donc $1 + a^6 + a^{12}$ est un entier naturel, $a^6 - 1$ est un entier naturel non nul donc $a^{18} - 1$ est divisible par $a^6 - 1$.

3. d est un diviseur de n donc il existe un entier naturel q tel que $n = d\,q$.

En appliquant la relation initiale à $q = a^d$: $(a^d)^{q-1+1} - 1 = (a^d - 1) (1 + a^d + \dots + (a^d)^{q-1})$

soit $a^{dq} - 1 = (a^d - 1) (1 + a^d + a^{2d} + \dots + a^{d(q-1)})$ soit $a^n - 1 = (a^d - 1) (1 + a^d + a^{2d} + \dots + a^{d(q-1)})$

a est un entier naturel donc $1 + a^d + a^{2d} + \dots + a^{d(q-1}$ est un entier naturel, $a^d - 1$ est un entier naturel non nul donc $a^n - 1$ est divisible par $a^d - 1$.