

**EXERCICE 1**      7 points      Commun à tous les candidats

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis au millième.

**Partie A**

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».

La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.

La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les événements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »

B : « La bouteille d'eau provient de la source B »

S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

- Déterminer la probabilité de l'évènement  $A \cap S$ .
- Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut 0,149.
- Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.
- Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.

Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95 % la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

**Partie B**

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type 1,6.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient.

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type  $\sigma$ .

- Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre 6,4 mg et 9,6 mg.
- Calculer la probabilité  $p(X \leq 6,5)$ .
- Déterminer  $\sigma$  sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est 0,1.

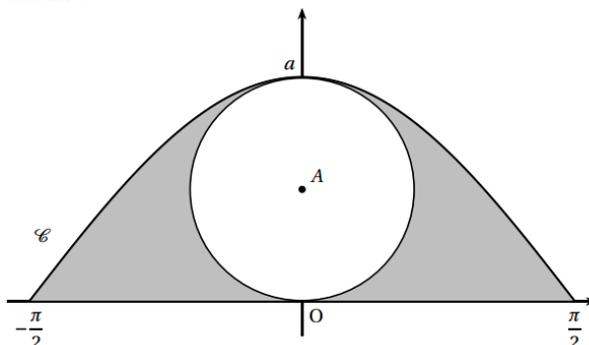
**Partie C**

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe C d'équation  $y = a \cos x$  avec  $x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$  et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées  $\left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$  et de rayon  $\frac{a}{2}$ . On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe C pour des valeurs de a inférieures à 1,4.

- Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$ , et la courbe C est égale à  $2a$  unités d'aire.
- Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?



**EXERCICE 2**      3 points      Commun à tous les candidats

Pour chaque réel a, on considère la fonction  $f_a$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par  $f_a(x) = e^{-x-a} - 2x + e^a$ .

- Montrer que pour tout réel a, la fonction  $f_a$  possède un minimum.

2. Existe-t-il une valeur de  $a$  pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

**EXERCICE 3**      5 points      Commun à tous les candidats

Soient  $x, y$  et  $z$  trois nombres réels. On considère les implications  $(P_1)$  et  $(P_2)$  suivantes :

$$(P_1) \quad (x + y + z = 1) \Rightarrow \left( x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3} \right)$$

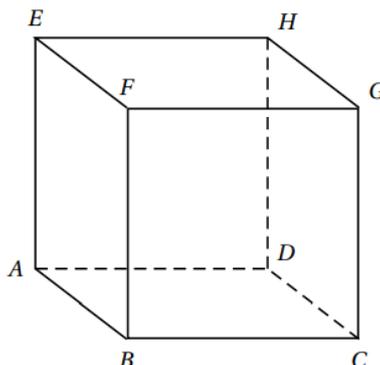
$$(P_2) \quad \left( x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3} \right) \Rightarrow (x + y + z = 1)$$

**Partie A**

L'implication  $(P_2)$  est-elle vraie ?

**Partie B**

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé  $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ .



1. *a.* Vérifier que le plan d'équation  $x + y + z = 1$  est le plan (BDE).
  - b.* Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
  - c.* Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .
  2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
  3. Soit M un point de l'espace.
  - a.* Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors  $AM^2 = AK^2 + MK^2$ .
  - b.* En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors  $AM^2 \geq AK^2$ .
  - c.* Soient  $x, y$  et  $z$  des réels quelconques.
- En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées  $(x; y; z)$ , montrer que l'implication  $(P_1)$  est vraie.

**EXERCICE 4**      5 points      Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites de nombres réels  $(d_n)$  et  $(a_n)$  définies par  $d_0 = 300, a_0 = 450$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + \frac{1}{2} a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer  $d_1$  et  $a_1$ .
  2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de  $d_n$  et  $a_n$  pour une valeur entière de  $n$  saisie par l'utilisateur.
- L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	$n$ et $k$ sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de $n$
Traitement :	Pour $k$ variant de 1 à $n$  D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$  A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$
Sortie :	Fin pour Afficher D Afficher A

- a.* Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour  $n = 1$  ?  
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?
- b.* Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. **a.** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $e_n = d_n - 200$ . Montrer que la suite  $(e_n)$  est géométrique.  
**b.** En déduire l'expression de  $d_n$  en fonction de  $n$ .  
**c.** La suite  $(d_n)$  est-elle convergente ? Justifier.
4. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = 100 n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$
- a.** Montrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on a  $2n^2 \geq (n+1)^2$ .  
**b.** Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4,  $2^n \geq n^2$ .  
**c.** En déduire que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4,  $0 \leq 100 n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$   
**d.** Étudier la convergence de la suite  $(a_n)$ .

#### EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne.

Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé.

Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.

On souhaite étudier l'évolution sur le long terme, de la fréquentation du site à partir d'un mois noté 0.

Des relevés de la fréquentation du site ont conduit aux observations suivantes :

- Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
- Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.
- Chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.

On modélise cette situation par deux suites de nombres réels  $(d_n)$  et  $(a_n)$ . Pour tout entier naturel  $n$ ,  $d_n$  et  $a_n$  sont respectivement des approximations du nombre de débutants et du nombre d'avancés au début du mois  $n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $U_n$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$ . On pose  $d_0 = 300$ ,  $a_0 = 450$  et, pour tout entier  $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + \frac{1}{2} a_n + 70 \end{cases}$$

1. **a.** Justifier l'égalité  $a_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + \frac{1}{2} a_n + 70$  dans le contexte de l'exercice.  
**b.** Déterminer les matrices  $A$  et  $B$  telles que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = A U_n + B$ .  
**2.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \text{ où } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **a.** Déterminer la matrice  $C$  qui vérifie l'égalité  $C = A C + B$ .

- b.** Pour tout entier  $n > 0$ , on pose  $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$ .

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = A V_n$ .

- c.** On admet que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $V_n = A^n V_0$ .

$$\text{En déduire que pour tout entier naturel } n \geq 1, U_n = \begin{pmatrix} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100 n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$$

4. **a.** On admet que pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2$ .

En déduire que pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $0 \leq 100 n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$ .

- b.** En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme ?

## CORRECTION

### EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

#### Partie A

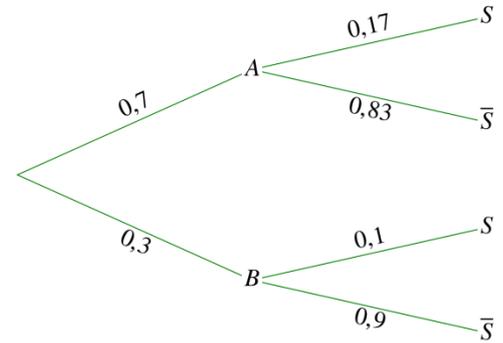
1.  $P(A \cap S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$
2.  $P(B \cap S) = 0,3 \times 0,1 = 0,03$  donc  $P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,149$ .
3.  $P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,119}{0,149}$  donc la probabilité que l'eau contenue

dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire est d'environ 0,799

4. La fréquence observée sur l'échantillon de taille  $n = 1000$  est  $f_{\text{obs}} = \frac{211}{1000} = 0,211$ .

$n = 1000$ ,  $nf_{\text{obs}} = 211$  et  $n(1 - f_{\text{obs}}) = 789$  donc  $n > 30$ ,  $nf_{\text{obs}} > 5$  et  $n(1 - f_{\text{obs}}) > 5$ , les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et on peut proposer un intervalle de confiance au seuil de 95% :

$$I = \left[ f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ soit } I \approx [0,179 ; 0,243].$$



#### Partie B

1.  $P(6,4 \leq X \leq 9,6) = 0,683$  (résultat de la calculatrice)
2. X prend des valeurs positives donc  $P(X \leq 6,5) = P(0 \leq X \leq 6,5) = 0,174$  (résultat de la calculatrice)
3. Soit  $T = \frac{Y - 9}{\sigma}$ , la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type  $\sigma$ , donc la variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite.

$$P(Y \leq 6,5) = P\left(\frac{Y - 9}{\sigma} \leq \frac{6,5 - 9}{\sigma}\right) = P\left(T \leq \frac{-2,5}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow \frac{-2,5}{\sigma} = -1,282 \Leftrightarrow \sigma = \frac{2,5}{1,282} \Leftrightarrow \sigma \approx 1,950$$

#### Partie C

1. Sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , comme  $a > 0$ , la fonction  $x \rightarrow a \cos x$  est positive donc l'aire du domaine compris entre l'axe des

abscisses, les droites d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$ , et la courbe C est  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x \, dx = \left[ a \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$  et  $\sin \frac{-\pi}{2} = -1$  donc  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x \, dx = a - (-a) = 2a$  unités d'aire.

2. L'aire du disque est  $\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$  donc on souhaite que  $2a = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$  soit  $2a = \pi \frac{a^2}{4}$  donc  $8a - \pi a^2 = 0$  soit  $a(8 - \pi a) = 0$

soit  $a = 0$  ou  $8 - \pi a = 0$  or  $a > 0$  donc  $a = \frac{8}{\pi}$

**EXERCICE 2**                      **3 points**                      **Commun à tous les candidats**

1.  $f_a$  est définie dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $f'_a(x) = e^{x-a} - 2$

$$e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 2 \Leftrightarrow x - a > \ln 2 \Leftrightarrow x > a + \ln 2$$

$x$	$-\infty$	$a + \ln 2$	$+\infty$
$f'_a(x)$	0		
$f_a$			

pour tout réel  $a$ , la fonction  $f_a$  possède un minimum égal à  $f_a(a + \ln 2) = e^{\ln 2} - 2(a + \ln 2) + e^a$   
soit  $f_a(a + \ln 2) = 2 - 2a - 2 \ln 2 + e^a$

2. Soit  $g(x) = 2 - 2x - 2 \ln 2 + e^x$

$g$  est définie dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $g'(x) = e^x - 2$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	0		
$g$			

$g$  admet un minimum pour  $x = \ln 2$  donc  $a = \ln 2$  minimise le minimum de  $f_a$  qui est égal à  $2 - 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + e^{\ln 2}$  soit  $4 - 4 \ln 2$

**EXERCICE 3**                      **5 points**                      **Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Si  $x = 1, y = 1, z = 1$  alors  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  donc  $\left(x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}\right)$  et  $x + y + z = 3$  donc  $x + y + z \neq 1$

L'implication  $(P_2)$  est fautive

**Partie B**

1. a. Le point B a pour coordonnées  $(1 ; 0 ; 0)$ ,  $x_B + y_B + z_B = 1$  donc B appartient au plan d'équation  $x + y + z = 1$

Le point D a pour coordonnées  $(0 ; 1 ; 0)$ ,  $x_D + y_D + z_D = 1$  donc D appartient au plan d'équation  $x + y + z = 1$

Le point E a pour coordonnées  $(0 ; 0 ; 1)$ ,  $x_E + y_E + z_E = 1$  donc E appartient au plan d'équation  $x + y + z = 1$

Les points B, D, E ne sont pas alignés donc le plan d'équation  $x + y + z = 1$  est le plan (BDE).

b. Le point G a pour coordonnées  $(1 ; 1 ; 1)$ ,  $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan d'équation  $x + y + z = 1$  donc la droite

(AG) est orthogonale au plan (BDE).

c. (AG) est orthogonale au plan (BDE) donc perce le plan en un point unique, il suffit de vérifier que ce point est K.

$$\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AG} \text{ donc } K \in (AG)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \text{ donc } K \text{ appartient au plan d'équation } x + y + z = 1.$$

L'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

2. Les côtés du triangle BDE sont les diagonales des faces du cube qui sont isométriques donc ils sont de même longueur

$BD = DE = EB = \sqrt{2}$ , BDE est un triangle équilatéral.

3. a. La droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) en K donc est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier, pour tout point M du plan (BDE), à (MK) donc le triangle AKM est rectangle en K

D'après le théorème de Pythagore, pour tout point M du plan (BDE), alors  $AM^2 = AK^2 + MK^2$ .

b. si M appartient au plan (BDE), alors  $AM^2 = AK^2 + MK^2$ ,  $MK^2 \geq 0$  donc  $AM^2 \geq AK^2$ .

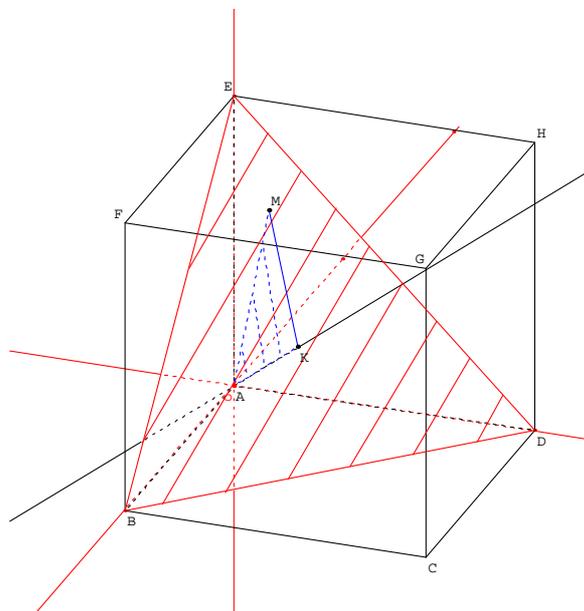
c. Soient x, y et z des réels quelconques tels que  $x + y + z = 1$ . Soit le point M de coordonnées (x ; y ; z),  $x + y + z = 1 \Leftrightarrow M$  appartient à (BGE)

M appartient à (BGE) donc  $AM^2 \geq AK^2$  or  $AM^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$AK^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$x + y + z = 1$  donc M appartient à (BGE) donc  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$

$(x + y + z = 1) \Rightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}\right)$ . L'implication (P<sub>1</sub>) est vraie.



#### EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites de nombres réels ( $d_n$ ) et ( $a_n$ ) définies par  $d_0 = 300$ ,  $a_0 = 450$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1.  $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = 250$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = 150 + 225 + 70 = 445$

2. a. On obtient en sortie de l'algorithme pour  $n = 1$ , D = 250 et A = 420

n	D	A
0	300	450
1	$\frac{300}{2} + 100 = 250$	$\frac{250}{2} + \frac{450}{2} + 70 = 420$

Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question 1. (A = 420 et non 445).

b. L'algorithme utilise la nouvelle valeur de D pour calculer A et non la valeur initiale, il faut donc stocker cette valeur initiale dans une variable intermédiaire pour pouvoir l'utiliser pour calculer A

Variables :	$n$ et $k$ sont des entiers naturels
	<b>C</b> , D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de $n$
Traitement :	Pour $k$ variant de 1 à $n$
	<b>C prend la valeur D</b>
	D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
	A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{C}{2} + 70$
	Fin pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. a. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $e_n = d_n - 200$  donc  $d_n = e_n + 200$  or  $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100$  donc en remplaçant

$$e_{n+1} + 200 = \frac{1}{2}(e_n + 200) + 100 \text{ soit } e_{n+1} + 200 = \frac{1}{2}e_n + 100 + 100 \text{ donc } e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n.$$

La suite ( $e_n$ ) est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , de premier terme  $e_0 = d_0 - 200 = -100$  donc  $e_n = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b.  $d_n = e_n + 200$  donc  $d_n = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$

c.  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 200$ . La suite  $(d_n)$  est convergente.

4. a. Soit  $x$  un réel quelconque,  $2x^2 - (x+1)^2 = [\sqrt{2}x - (x+1)][\sqrt{2}x + (x+1)]$

$2x^2 - (x+1)^2 = [(\sqrt{2}+1)x - 1][(\sqrt{2}+1)x + 1]$

$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx 2,4$  et  $\frac{-1}{\sqrt{2}+1} < 0$  d'où le tableau de signes

$x$	$-\infty$	$\frac{-1}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$	$+\infty$	
$2x^2 - (x+1)^2$	+	0	-	0	+

$n \geq 3$  donc  $n \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1}$  donc  $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$  soit pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on a  $2n^2 \geq (n+1)^2$ .

b. **Initialisation :**  $n = 4, 2^4 = 16$  et  $4^2 = 16$  donc pour  $n = 4$  on a  $2^n \geq n^2$ .

**Hérédité :** montrons pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4, si  $2^n \geq n^2$  alors  $2^{n+1} \geq (n+1)^2$   
 $2^{n+1} = 2 \times 2^n$  donc  $2^{n+1} \geq 2n^2$  or pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on a  $2n^2 \geq (n+1)^2$  donc  $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$

**Conclusion :** La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4,  $2^n \geq n^2$ .

c. pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4,  $2^n \geq n^2$  donc  $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$  donc  $0 \leq 100n \frac{1}{2^n} \leq \frac{100n}{n^2}$  soit pour tout entier  $n$

supérieur ou égal à 4,  $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$

d.  $a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 = 340$

pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4,  $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$  or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$  donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 340$ ,  $(a_n)$  converge vers 340.

**EXERCICE 4** 5 points **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. a. D'après l'énoncé, la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site donc il reste la moitié des avancés du mois précédent sur le site

Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé.

Le nombre d'avancés au début du mois  $n+1$  sera composé de la moitié des débutants du mois précédent passant au niveau avancé

soit  $\frac{1}{2}d_n$  et de la moitié du nombre des avancés ne s'étant pas désinscrits soit  $\frac{1}{2}a_n$  et des 70 personnes qui se sont inscrites en début du mois.

On obtient bien  $a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$ .

b. Si  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$  alors pour tout entier naturel  $n, U_{n+1} = A U_n + B$ .

2. **Initialisation :**  $n = 1, \frac{1}{2}(I_2 + T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$ , la propriété est initialisée.

**Hérédité :** montrons pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, si  $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$  alors  $A^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + (n+1)T)$

$A^{n+1} = A \times A^n = \left(\frac{1}{2}\right)(I_2 + T) \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + T) (I_2 + nT)$

$$(I_2 + T) (I_2 + nT) = I_2 + nT + T + nT^2 \text{ or } T^2 = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + nT + T) \text{ soit } A^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + (n+1)T)$$

**Conclusion :** La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$ .

$$3. a. \quad C = AC + B \Leftrightarrow (I_2 - A)C = B$$

$$(I_2 - A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ donc } \det(I_2 - A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{ donc } (I_2 - A) \text{ est inversible et } (I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = (I_2 - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$$

$$b. \quad \text{Pour tout entier } n > 0, \text{ on pose } V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} \text{ donc } V_n = U_n - C$$

$$\begin{cases} U_{n+1} = AU_n + B \\ C = AC + B \end{cases} \text{ donc par soustraction terme à terme } U_{n+1} - C = A(U_n - C) \text{ soit pour tout entier naturel } n, V_{n+1} = AV_n.$$

c. On admet que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $V_n = A^n V_0$ .

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \text{ donc } A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$$

$$V_n = A^n V_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 100 \\ 100n + 110 \end{pmatrix} \text{ donc } U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ (100n + 110) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit pour tout entier naturel } n \geq 1, U_n = \begin{pmatrix} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$$

4. a. pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4,  $2^n \geq n^2$  donc  $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$  donc  $0 \leq 100n \frac{1}{2^n} \leq \frac{100n}{n^2}$  soit pour tout entier  $n$

$$\text{supérieur ou égal à 4, } 0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$$

$$b. \quad U_n = \begin{pmatrix} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} \text{ donc } d_n = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \text{ et } a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 200$ . La suite  $(d_n)$  est convergente vers 200 soit à long termes, 200 internautes débutants.

$$a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 = 340$$

pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4,  $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$  or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$  donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 340, (a_n) \text{ converge vers 340 soit à long termes, on a 340 internautes avancés.}$$