

Nouvelle-Calédonie Décembre 98 Bac ES

Au cours d'une kermesse, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes : sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes.

L'animateur place alors une souris dans l'enclos. On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables.

Un joueur participe au jeu. Le règlement du jeu est le suivant :

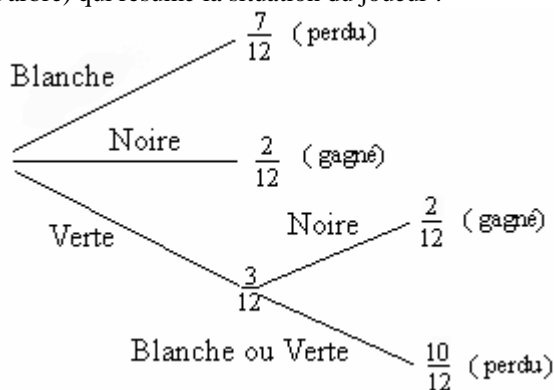
- Si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd ;
- Si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne,
- Si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos ;
- si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne sinon il perd.

On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

1. Montrez que la probabilité de l'événement " le joueur gagne " est : $\frac{5}{24}$.
2. Un joueur possède 10 F qu'il verse pour participer à une partie. S'il gagne, il reçoit k francs ; sinon, il ne reçoit rien. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.
a : Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
b : Calculez, en fonction de k , l'espérance mathématique $E[X]$ de la variable aléatoire X .
c : Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable?
(c'est à dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 10 F à la fin de la partie)

CORRECTION

Le plus simple est de faire un schéma (un arbre) qui résume la situation du joueur :



L'hypothèse importante qui est faite dans l'énoncé est que le choix de la deuxième cage de la souris est indépendant du premier choix. Dans ce cas, on sait que la probabilité de " A et B ", si A et B sont deux événements indépendants, est :

$$p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B).$$

Appelons N l'événement "la souris choisit la cage Noire" , B "elle choisit la cage Blanche" V "elle choisit la cage Verte" et G l'événement "Le joueur gagne"..

Donc on a :

$$p(\text{"le joueur gagne"}) = p(\text{"la souris choisit la cage Noire"} \text{ ou } \text{"la souris choisit la case Verte et la case Noire en deuxième choix"})$$

$$p(\text{"le joueur gagne"}) = p(N) + p(V \text{ et } N)$$

$$p(\text{"le joueur gagne"}) = p(N) + p(V) \times p(N).$$

$$\text{Comme } p(N) = \frac{2}{12} \text{ et } p(V) = \frac{3}{12} \text{ on a } p(G) = \frac{5}{24}$$

2. Si le joueur verse 10 francs pour faire une partie et reçoit k francs s'il gagne, alors la variable aléatoire X correspondant à la somme que possède le joueur après la partie peut prendre les valeurs 0 ou $(k - 10)$.

a : L'événement " $X = 0$ " est l'événement " Le joueur à perdu " donc , on a :

$$p(X = 0) = p(\bar{G}) = 1 - p(G) = \frac{19}{24}.$$

$$p(X = k - 10) = p(G) = \frac{5}{24}$$

b : L'espérance de X est alors : $E[X] = p(X = 0) \times 0 + p(X = k - 10) \times (k - 10)$

$$E[X] = \frac{5}{24} (k - 10)$$

c : La partie est équitable si l'espérance de X est égale à 10 donc $\frac{5}{24} (k - 10) = 10$ d'où $k = 58$