

Concours d'entrée en 1^{ère} année de l'ENSA de Marrakech

Epreuve de mathématiques (durée 1h15min)

Remarques importantes

- 1) La documentations, les calculatrices et les téléphones portables sont interdites.
- 2) Parmi les réponses proposées elle n'y a qu'une qui est juste.
- 3) Cochez la case qui correspond à la réponse correcte sur la fiche de réponses.
- 4) Réponse juste = **1 point** ; Réponse fausse = **-1 point** ; pas de réponse = **0 point**.

Noter Bien Plus qu'une case choquée = **-1 point**.

Exercices 1

a) Si $x = [\ln(e^{\sqrt{2}})]^2 e^{-\ln(\frac{1}{2})}$ alors $x = \sqrt{2}$.

b) Si $x = \ln\left(\frac{3^2}{2^3}\right) - 4\ln(\sqrt{3})$ alors $x = \ln 8$.

c) Si $x = \frac{(\sqrt[4]{4})^2}{(\sqrt[4]{3\sqrt{3}})^2 \sqrt{\sqrt{3}}}$ alors $x = \frac{2}{3}$.

d) Si $\ln(2x - 1) = \ln(x - 1)$ alors $x = 0$.

Exercices 2

Soit z_1 et z_2 les nombres complexes définis par $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 2i - z_1$.

a) Le module de z_1^{-1} est 2.

b) Un argument de z_2 est $\frac{7\pi}{6}$.

c) Un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ est $-\frac{\pi}{2}$.

d) Le module de $\frac{z_2}{z_1}$ est $-\sqrt{3}$.

Exercices 3

360 personnes ont leurs anniversaires à des dates toutes distinctes dans l'année de 365 jours. Combien y-a-t-il de calendriers d'anniversaires possibles?

a) A_{365}^{360} .

b) C_{365}^{360} .

c) $360!C_{365}^5$.

d) $360!A_{365}^5$.

Exercices 4

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(4x)} = \frac{4}{5}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 1}{e^{2x} - 1} = 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 - x} = 1$.

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}\right)$ n'existe pas.

Exercices 5

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \sin(n^2 + 1) = 2$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{\ln(n + 1)}$ n'existe pas.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + (-1)^n n}{n^2 - 1} = 2$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{9n^2 - n + 1} - 3n = \frac{1}{4}$.

Exercices 6

- a) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q .
- b) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente.
- c) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée alors $\left(\frac{(-1)^n u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0.
- d) Si $u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\frac{1}{2}$.
-

Exercices 7

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \cos^2(t) \sin^3(t)$.

- a) La fonction f est paire.
- b) La fonction f est π -périodique.
- c) La courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport au point O .
- d) $\int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^0 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) d\theta$.
-

Exercices 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ de courbe représentative C dans un repère orthonormal.

- a) La courbe de la fonction g_2 définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $g_1(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ se déduit de C par symétrie par rapport à l'axe des y .
- b) La courbe de la fonction g_3 définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $g_2(x) = \frac{x+3}{x+1}$ se déduit de C par translation de vecteur $u(0, -2)$.
- c) La courbe de la fonction g_3 définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $g_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$ se déduit de C par symétrie par rapport à l'axe des x .
- d) La courbe de la fonction g_4 définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ par $g_4(x) = \frac{1-2x}{2x+1}$ se déduit de C par homothétie de centre O et de rapport 2.

Exercices 9

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ de courbe représentative C dans un repère orthonormal.

a) $f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$ sur \mathbb{R} .

b) La droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe C .

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

d) La droite d'équation $y = \ln 2$ est asymptote à la courbe C .

Exercices 10

a) La fonction $x \rightsquigarrow \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ est la dérivée de la fonction $x \rightsquigarrow \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2}$ sur \mathbb{R} .

b) La fonction $x \rightsquigarrow \frac{5}{2} \sin(x) [\cos(x)]^{\frac{3}{2}}$ est la dérivée de la fonction $x \rightsquigarrow (\cos x)^{\frac{5}{2}}$ sur \mathbb{R} .

c) La fonction $x \rightsquigarrow \ln(x^2+x+1) + \frac{x(2x+1)}{x^2+x+1}$ est la dérivée de la fonction $x \rightsquigarrow x \ln(x^2+x+1)$ sur \mathbb{R} .

d) La fonction $x \rightsquigarrow \frac{e^{\sqrt{2x+5}}}{2\sqrt{2x+5}}$ est la dérivée de la fonction $x \rightsquigarrow e^{\sqrt{2x+5}}$ sur $]-\frac{5}{2}, +\infty[$.

Exercices 11

Soient (O, \vec{i}, \vec{j}) le repère orthonormal direct du plan et D la droite de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ passant par le point $A(1,0)$.

a) L'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 - 2x + 3 + y^2 + 4y = 0$ est le cercle de centre $C(1, -2)$ de rayon 2.

b) L'équation cartésienne de la droite D est $y = 1 + x$.

c) La distance de la droite D au point de coordonnées $(1,1)$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) La droite D coupe la courbe d'équation $y = 2x^2$ en un point de coordonnées $(-1, 2)$.

Exercices 12

a) $\int_0^2 |x^2 - x| dx = \frac{2}{3}$.

b) La fonction $x \mapsto (x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$.

c) La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x^2 + x + 1}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

d) La fonction $x \mapsto \ln |2 + 3 \sin(x)|$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{2 + 3 \sin(x)}$.

Exercices 13

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$.

a) Sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \frac{\sqrt{|4x^2 - 1|} - 4x}{\sqrt{|4x^2 - 1|}}$.

b) La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C .

c) La tangente à la courbe C représentative de f au point $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$.

d) La droite d'équation $y = -3x$ est asymptote à la courbe C .

Exercices 14

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^{x+1}$.

a) $f \circ g(x) = e^{x^2+2}$.

b) $(f \circ g)'(x) = 2xe^{x^2+2}$.

c) $f \circ g$ est croissante.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Exercices 15

$$a) \int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2 + 1}{2}$$

$$b) \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \ln\left(\frac{27}{4}\right) + 1$$

$$c) \int_2^3 \ln(x) dx = \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{2}).$$

$$d) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2 + \frac{5}{e}.$$
