La Réunion, juin 2005

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition

$$(C)\ \begin{cases} f(-x)\,f'(x) = 1 \text{ pour tout nombre réel } x \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(-x)\,f(x).$$

a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{1}{16}\,y$.

Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Question de cours

a. On sait que la fonction $x \to e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \to K\,e^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

CORRECTION

1. *a*. Pour tout x réel, $f(-x)\,f'(x) = 1$ donc $f(x)\,f'(-x) = 1$ donc pour tout x réel, $f(x) \neq 0$

b. La dérivée de $v \circ u$ est $(v' \circ u) \times u'$ ici $v = f$ et u est la fonction telle que $u(x) = -x$ donc la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$

$g'(x) = -f'(-x)\,f(x) + f(-x)\,f'(x)$

c. Pour tout x réel, $f(-x)\,f'(x) = 1$ donc $f(x)\,f'(-x) = 1$

donc en remplaçant dans $g'(x) = -f'(-x)\,f(x) + f(-x)\,f'(x)$, on a : $g'(x) = -1 + 1 = 0$

g est constante donc pour tout x réel, $g(x) = g(0) = [f(0)]^2 = 16$

d. $g(x) = 16$ donc $f(-x)\,f(x) = 16$, f ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ donc $f(x) = \dfrac{1}{16\,f(-x)}$

or $f(-x)\,f'(x) = 1$ donc $\dfrac{1}{f(-x)} = f'(x)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{16}\,f(x)$

f est solution de (E) et vérifie $f(0) = -4$ (par hypothèse)

2. Question de cours

a. Soit g une solution quelconque de (E) donc $g'(x) = \dfrac{1}{16}g(x)$

Soit h la fonction définie par $h(x) = g(x)\,e^{-\frac{x}{16}}$,

$h'(x) = g'(x)\,e^{-\frac{x}{16}} - \dfrac{1}{16}g(x)\,e^{-\frac{x}{16}}$ or $g'(x) = \dfrac{1}{16}g(x)$

donc $h'(x) = \dfrac{1}{16}g(x)\,e^{-\frac{x}{16}} - \dfrac{1}{16}g(x)\,e^{-\frac{x}{16}} = 0$

donc h est constante soit $h(x) = K$, où K est un nombre réel quelconque.

or $h(x) = g(x)\,e^{-\frac{x}{16}} = K$ donc $g(x) = K\,e^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

b. Les solutions de (E) sont les fonctions g de la forme $x \to K\,e^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

$g(0) = -4$ donc $K\,e^0 = -4$ donc $K = -4$ donc il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. D'après la question 1, si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) alors f est solution de (E) et vérifie $f(0) = -4$

d'après la question 2. *b*., il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0,

donc si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) alors $f(x) = -4\,e^{\frac{x}{16}}$

<u>Vérification</u> : $f(-x) = -4\,e^{-\frac{x}{16}}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{-4}{16}\,e^{\frac{x}{16}}$ donc $f(-x)\,f'(x) = 1$ de plus $f(0) = -4$ donc f vérifie les conditions (C).