

On lance deux dés D_1 et D_2 parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note

X_1 le numéro obtenu en lançant le dé D_1 ,

X_2 le numéro obtenu en lançant le dé D_2 ,

S la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus,

P la variable aléatoire égale au numéro le plus grand obtenu,

M la variable aléatoire égale au numéro le plus petit obtenu.

1. a : Calculez l'espérance de X_1 et l'espérance de X_2 .

Quelle relation y a-t-il entre X_1 , X_2 et S ? Quelle est l'espérance de S ?

b : Déterminez la loi de probabilité de S . On présentera les résultats sous forme de tableau.

Retrouvez alors directement l'espérance de S .

2. a : Déterminez la loi de probabilité de P . Pour cela, on peut s'aider du tableau suivant en le complétant avec les valeurs que prend la variable P .

		Résultat du dé D_1					
		1	2	3	4	5	6
Résultat du dé D_2	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

b : Vérifiez alors que l'espérance de P est :

$$E[P] = \frac{161}{36}.$$

3. a : Quelle relation simple a-t-on entre M , P et S ?

b : Quelle est l'espérance de M ?

c : Déterminez la loi de probabilité de M . Retrouvez alors le résultat précédent.

CORRECTION

On peut remarquer que l'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles du lancer des deux dés.

Ω est donc le produit cartésien $D_1 \times D_2$. Son cardinal est alors 36.

Comme il y a équiprobabilité, pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

1. a : On peut remarquer que les lois des variables aléatoires X_1 et X_2 sont identiques.

La variable X_1 prend les valeurs $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 avec pour chacune d'entre elles, $p(X_1 = k) = \frac{1}{6}$.

L'espérance de X_1 est donc : $E[X_1] = \sum_k k p(X = k)$

$$E[X_1] = \frac{1}{6} [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6] = 3,5$$

De même, l'espérance de X_2 est $E[X_2] = 3,5$.

On sait que $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$ donc, comme $S = X_1 + X_2$, on a $E[S] = 7$.

b : Le plus simple, pour déterminer la loi de probabilité de S , est de faire un tableau.

S	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les valeurs que peut prendre la variable S sont $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

Le tableau de la loi de probabilité de S est :

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

L'espérance de S est alors, après un simple calcul à la machine : $E[S] = \sum_k k p(S = k) = 7$

2. a : P est la variable aléatoire définie par " P = plus grand des deux numéros obtenus".
On forme alors le tableau suivant :

P	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

P peut donc prendre les valeurs $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 et son tableau de loi de probabilité est :

$P = k$	1	2	3	4	5	6
$p(P = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b : Un simple calcul à la machine montre alors que : $E[P] = \sum_k k p(P = k)$

$$E[P] = \frac{1}{36} [1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 3 + 7 \times 4 + 9 \times 5 + 6 \times 6] = \frac{161}{36}$$

3. a : On peut remarquer que la somme des numéros obtenus lors du lancer des deux dés est égale à $P + M$.

Donc, la relation entre S, P et M est : $S = P + M$.

On sait que $E[S] = E[P] + E[M]$ donc $E[M] = E[S] - E[P]$.

$$\text{D'où } E[M] = 7 - \frac{161}{36} = \frac{91}{36}$$

b : Pour déterminer la loi de probabilité de M, on forme le tableau suivant :

M	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

La loi de probabilité de M est alors :

$M = k$	1	2	3	4	5	6
$p(M = k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

L'espérance de M est donc :

$$E[M] = \sum_k k p(M = k)$$

$$E[M] = \frac{1}{36} [11 \times 1 + 9 \times 2 + 7 \times 3 + 5 \times 4 + 3 \times 5 + 1 \times 6]$$

$$E[M] = \frac{91}{36}$$

On retrouve bien le résultat précédent.