EXERCICE 1 (4 points)
On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \text{ où } a \text{ est un réel donné tel que } 0 < a < 1.$$

1° On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle [0 ; 2], la droite d d'équation $y = x$ et la courbe P représentative de la fonction $f : x \to x\,(2 - x)$.

c) Utiliser d, et P pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1 , u_2 et u_3.

2° On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle] 0 ; 1 [.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Que peut-on en déduire ?

3° On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - u_n$.

a) Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 2 (5 points)

Première partie

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante (E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1° Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z - 2)(a z^2 + b z + c) = 0$ où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2° En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1° Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2 - 2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2 + 2i$.

2° Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3° Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.

b) Placer les points E et F.

4° *a*) Vérifier que $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.

b) En déduire la nature du triangle AEF.

5° Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 (5 points) Spécialité

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Première partie

ABC est un triangle direct du plan orienté.

On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].

Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe ci-jointe sur laquelle on raisonnera.

La figure sera jointe à la copie.

d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.

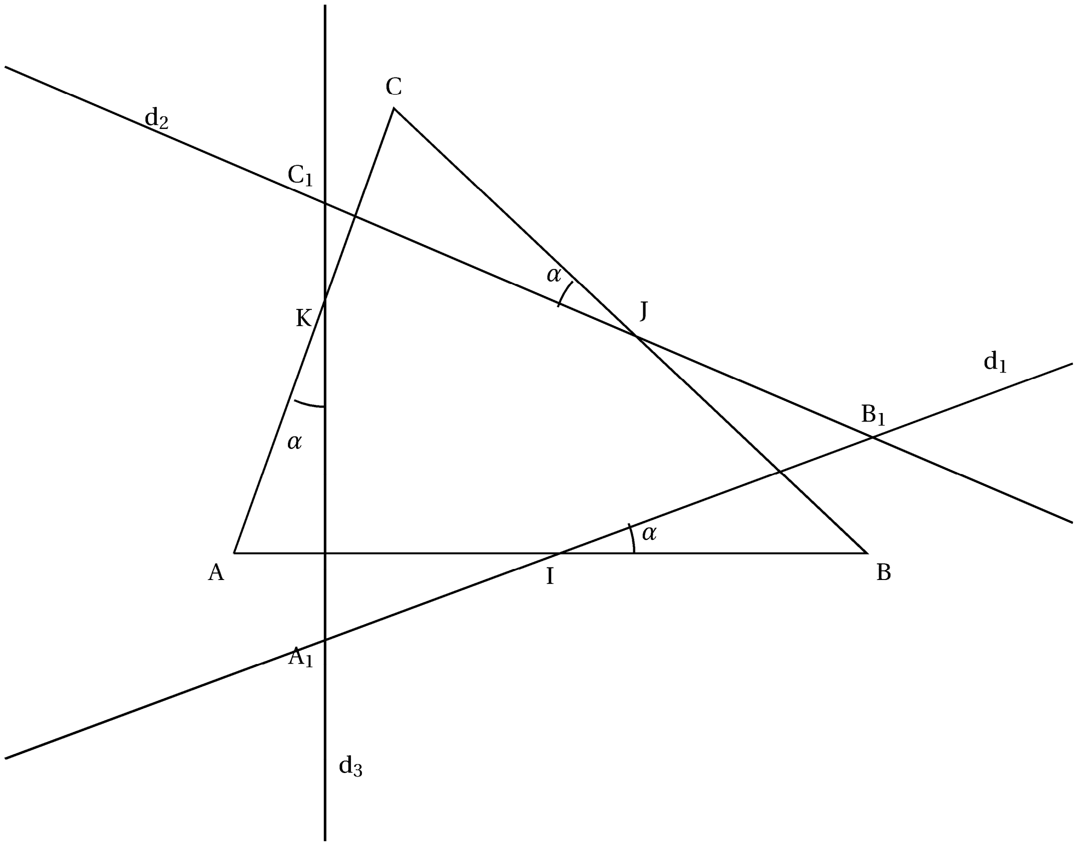
d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.

d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.

A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3 , B_1 celui de d_1 et d_2, et C_1 celui de d_2 et d_3.

1° On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles H I B et H B_1 J sont semblables.

2° En déduire que les triangles ABC et $A_1 B_1 C_1$ sont semblables.



Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A - Construction de la figure

1° Placer les points A(– 4 – 6 i), B (14), C (– 4 + 6 i), A_1 (3 – 7 i), B_1 (9 + 5 i) et C_1 (– 3 – i).

2° Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.

3° Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.

On admettra que B_1, J, C_1 d'*une part, et* C_1, K, A_1 *d'autre part sont alignés.*

4° Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1})$.

On admettra que $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}) = \dfrac{\pi}{4}$ *et* $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}) = \dfrac{\pi}{4}$.

5° Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?

B Recherche d'une similitude directe *s* transformant ABC en $A_1 B_1 C_1$.

On admet qu'il existe une similitude directe *s* transformant les points A, B et C respectivement en A_1, B_1 et C_1.

1° Montrer que l'écriture complexe de *s* est $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i\right) z + 2 - 2i$, où *z* et *z*' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par *s*.

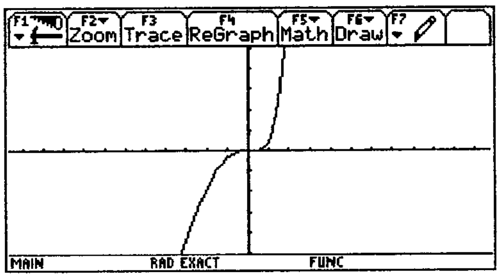
2° *a*) Déterminer le rapport et l'angle de *s*.

b) Déterminer l'affixe du centre Ω de *s*.

3° Que représente le point Ω pour le triangle ABC ?

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \, e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$.



Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

a) le sens de variation de f sur $[-3\,;\,2]$?

b) la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : Contrôle de la première conjecture.

1° Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x + 2)\, e^{x-1} - 1 .$$

2° Etude du signe de $g(x)$ pour x réel.

a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.

b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

c) En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.

d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.

Montrer que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.

e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3° Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f

c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B : Contrôle de la deuxième conjecture.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1° Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$.

2° On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$

a) Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0\,;1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0\,;1]$.

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3° *a*) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe $(x'x)$.

b) Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.

c) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C : Tracé de la courbe.

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de C correspondant à l'intervalle $[-0{,}2\,;0{,}4]$, dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ avec les unités suivantes :

Sur l'axe $(x'x)$: 1 cm représentera 0,05

Sur l'axe $(y'y)$: 1 cm représentera 0,001

1° Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \cdot 10^{-4}$ (n entier relatif).

x	– 0,20	– 0,15	– 0,10	– 0,05	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$f(x)$													

2°- Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D : Calcul d'aire.

On désire maintenant calculer l'aire du domaine D fermé délimité par la courbe Γ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln(2)$.

1° A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to x^2 \, e^x$.

2° En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

3° Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine D puis en donner une valeur approchée en cm^2.

CORRECTION

EXERCICE 1 (4 points)

1° *a.* $u_1 = u_0(2 - u_0) = \dfrac{15}{64}$ donc $u_2 = u_1(2 - u_1) = \dfrac{15}{64}\left(2 - \dfrac{15}{64}\right) = \dfrac{1\,695}{4\,096}$

2° *a.* $0 < a < 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si la propriété vraie pour un rang n, alors elle est vraie au rang $n + 1$.

$u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donc $u_{n+1} = 1 - (1 - 2u_n + u_n^2)$ soit $u_{n+1} = 1 - (1 - u_n)^2$

$0 < u_n < 1$ donc $0 < 1 - u_n < 1$ donc $0 < (1 - u_n)^2 < 1$ donc $-1 < -(1 - u_n)^2 < 0$ donc $0 < 1 - (1 - u_n)^2 < 1$ donc $0 < u_{n+1} < 1$

La propriété est vraie au rang $n + 1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$.

On aurait pu démontrer cette propriété en utilisant la fonction $f : f(x) = 2x - x^2$

f est **strictement** croissante sur $[0 ; 1]$ donc si $0 < u_n < 1$ alors $f(0) < f(u_n) < f(1)$ soit $0 < u_{n+1} < 1$ d'où la conclusion.

b. $u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n)$

$0 < u_n < 1$ donc $0 < 1 - u_n < 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc est convergente.

3° *a.* $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2$ donc $v_{n+1} = (1 - u_n)^2 = v_n^2$

b) $v_1 = v_0^2$; $v_2 = v_1^2 = (v_0^2)^2 = v_0^{2\times 2}$

$v_3 = v_2^2 = (v_0^{2\times 2})^2 = v_0^{2\times 2\times 2}$

Soit la propriété : pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = (v_0)^{2^n}$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si la propriété vraie pour un rang n, alors elle est vraie au rang $n + 1$.

$v_{n+1} = v_n^2 = \left[(v_0)^{2^n}\right]^2 = (v_0)^{2^n\times 2}$ donc $v_{n+1} = (v_0)^{2^{n+1}}$

La propriété est vraie au rang $n + 1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) $0 < v_0 < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ or $u_n = 1 - v_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

EXERCICE 2

Première partie

1° $2^3 + 2 \times (2^2) - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$ donc 2 est solution de (E).

$(z - 2)(a z^2 + b z + c) = a z^3 + (-2a + b) z^2 + (-2b + c) z - 2c$

donc par identification des coefficients des termes de même degré : $a = 1$; $-2a + b = 2$; $-2b + c = 0$ et $-2c = -16$

donc $a = 1$; $b = 4$ et $c = 8$

$z^3 + 2z^2 - 16 = (z - 2)(z^2 + 4z + 8)$

2° $z^3 + 2z^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 4z + 8) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 + 4z + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times 8 = -16 = (4\,\mathrm{i})$ donc $z_1 = -2 + 2\,\mathrm{i}$ et $z_2 = -2 - 2\,\mathrm{i}$

$z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ a pour solutions : $z_0 = 2$; $z_1 = -2 + 2\,\mathrm{i}$ et $z_2 = -2 - 2\,\mathrm{i}$

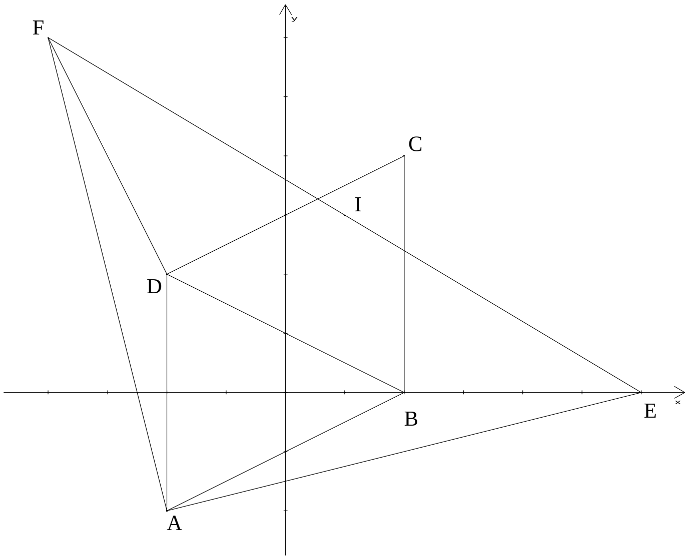
$|-2 + 2\,\mathrm{i}|^2 = 4 + 4$ donc $|-2 + 2\,\mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$

$z_1 = -2 + 2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ donc $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ donc $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

Deuxième partie

1° Figure :



2° ABCD est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ donc $z_C - z_D = z_B - z_A$ soit $z_C = z_D + z_B - z_A$

donc $z_C = -2 + 2\,\mathrm{i} + 2 + 2 + 2\,\mathrm{i} = 2 + 4\,\mathrm{i}$

3° *a*. La rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, transforme C en E tel que : $z_E - z_B = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$ soit $z_E = -\mathrm{i}\,(z_C - z_B) + z_B$

donc $z_E = -\mathrm{i}\,(2 + 4\,\mathrm{i} - 2) + 2$ donc $z_E = 6$

La rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, transforme C en F tel que : $z_F - z_D = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D)$ soit $z_F = \mathrm{i}\,(z_C - z_D) + z_D$

donc $z_F = \mathrm{i}\,(2 + 4\,\mathrm{i} + 2 - 2\,\mathrm{i}) - 2 + 2\,\mathrm{i}$. donc $z_F = -4 + 6\,\mathrm{i}$.

4° *a*) $z_F - z_A = -4 + 6\,\mathrm{i} - (-2 - 2\,\mathrm{i}) = -2 + 8\,\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\,(z_E - z_A) = \mathrm{i}\,(6 - (-2 - 2\,\mathrm{i})) = \mathrm{i}\,(8 + 2\,\mathrm{i}) = -2 + 8\,\mathrm{i}$ donc $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \mathrm{i}$.

b) $z_F - z_A = \mathrm{i}\,(z_E - z_A)$ or $|\mathrm{i}| = 1$ donc $|z_F - z_A| = |z_E - z_A|$ donc AF = AE

$\arg \mathrm{i} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $\arg \dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Le triangle AEF est donc direct, rectangle, isocèle en A.

5° I a pour affixe : $z_I = \dfrac{1}{2}(z_E + z_F) = 1 + 3\,\mathrm{i}$ donc la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe z' avec : $z' - z_I = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_I)$ soit $z' = -\mathrm{i}\,(z - z_I) + z_I$ donc $z' = -\mathrm{i}\,(z - 1 - 3\,\mathrm{i}) + 1 + 3\,\mathrm{i}$ soit $z' = -\mathrm{i}\,z - 2 + 4\,\mathrm{i}$

$z'_A = -\mathrm{i}\,z_A - 2 + 4\,\mathrm{i} = -\mathrm{i}\,(-2 - 2\,\mathrm{i}) - 2 + 4\,\mathrm{i} = -4 + 6\,\mathrm{i} = z_F$

$z'_B = -\mathrm{i}\,z_B - 2 + 4\,\mathrm{i} = -2\,\mathrm{i} - 2 + 4\,\mathrm{i} = -2 + 2\,\mathrm{i} = z_D$

$z'_E = -\mathrm{i}\,z_E - 2 + 4\,\mathrm{i} = -6\,\mathrm{i} - 2 + 4\,\mathrm{i} = -2 - 2\,\mathrm{i} = z_A$

Le triangle ABE est transformé par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, en le triangle ADF.

EXERCICE 2 (5 points) Spécialité

1° H est le point d'intersection des droites d_1 et (BC) donc les angles $\widehat{JHB_1}$ et $\widehat{IHB}$ sont opposés par le sommet donc ont la même mesure.

d_2 est l'image de (BC) par la rotation de centre J d'angle α donc l'angle $\widehat{CJC_1}$ a pour mesure α, les angles $\widehat{CJC_1}$ et $\widehat{HJB_1}$ sont opposés par le sommet donc ont la même mesure donc $\widehat{HJB_1} = \widehat{HJB}$

Les triangles H I B et H B_1 J ont deux angles égaux deux à deux : $\widehat{JHB_1} = \widehat{IHB}$ et $\widehat{HJB_1} = \widehat{HJB}$, donc sont semblables.

2° Soit L le point d'intersection de d_2 et (AC)

On démontre de même que les triangles CJL et KLC_1 sont semblables donc que les angles $\widehat{KC_1L}$ et $\widehat{LCJ}$ ont la même mesure, soit encore $\widehat{A_1C_1B_1} = \widehat{ACB}$

Les triangles H I B et H B_1 J sont semblables donc les angles $\widehat{HB_1J}$ et $\widehat{HBI}$ ont la même mesure soit encore : $\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{ABC}$.

Les triangles ABC et A_1 B_1 C_1 ont deux angles égaux deux à deux : $\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{A_1C_1B_1} = \widehat{ACB}$ donc sont semblables.

<u>Deuxième partie</u>

A - 2° I a pour affixe $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = 5 - 3\,i$; J a pour affixe $z_J = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = 5 + 3\,i$; K a pour affixe $z_K = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = -4$

3° $\overrightarrow{IA_1}$ a pour affixe : 3 – 7 i – (5 – 3 i) = – 2 – 4 i ; $\overrightarrow{IB_1}$ a pour affixe : 9 + 5 i – (5 – 3 i) = 4 + 8 i donc $\overrightarrow{IB_1} = -2\,\overrightarrow{IA_1}$

donc A_1, I, B_1 sont alignés.

4° $\overrightarrow{IB}$ a pour affixe : 14 – (5 – 3 i) = 9 + 3 i ; donc $\dfrac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I} = \dfrac{4 + 8\,i}{9 + 3\,i} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{(1 + 2\,i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)}$

$\dfrac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3 - i + 6\,i + 2}{10} = \dfrac{2}{3}(1 + i)$,

1 + i est un complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument θ tel que : $\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 + i$

donc $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in$ Z) donc arg $\dfrac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in$ Z) donc $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in$ Z)

5° La rotation de centre I d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ transforme I en I et B en B' tel que IB = IB' et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in$ Z)

or $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in$ Z) donc $(\overrightarrow{IB'}, \overrightarrow{IB_1}) = 0 + 2k\pi$ ($k \in$ Z) donc B' appartient à la droite (IB_1) = d_1

Une rotation r transforme une droite (MN) (M ≠ N) en la droite (r(M) r(N)) donc la rotation de centre I d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ transforme la droite (AB) = (IB) en la droite (IB') = d_1

B Recherche d'une similitude directe transformant ABC en A_1 B_1 C_1.

1° s est une similitude directe donc l'écriture complexe de s est $z' = a\,z + b$

s(A) = A_1 donc 3 – 7 i = a (– 4 – 6 i) + b

s(C) = C_1 donc – 3 – i = a (– 4 + 6 i) + b

donc par différence terme à terme : 6 – 6 i = – 12 i a soit i (6 – 6 i) = 12 a donc $a = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

en remplaçant : $b = 3 - 7\,i - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)(-4 - 6\,i)$ donc b = 2 – 2 i. L'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) z + 2 - 2\,i$

(ce qui suit n'est pas demandé)

On vérifie que si z = 14 alors z' = 9 + 5 i donc que s est une similitude directe transformant ABC en A_1 B_1 C_1.

2° *a*) $|a| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et arg $a = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in$ Z) donc s est une similitude directe de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b) Ω est le point invariant par s donc son affixe vérifie : $z = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) z + 2 - 2\,i$ soit $2z = (1 + i)z + 4 - 4\,i$ soit $(1 - i)z = 4 - 4\,i$

donc z = 4 donc Ω a pour affixe 4

3° ΩA = | – 4 – 6 i – 4 | = 10 ; et ΩB = | 14 – 4 | = 10 et ΩC = | – 4 + 6 i – 4 | = 10 donc Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

PROBLEME

Conjectures

a) f semble être croissante sur [– 3 ; 2].

b) La courbe de f semble être en dessous de l'axe des abscisses sur [– 3 ; 0] et au-dessus sur [0 ; 2]

Partie A : Contrôle de la première conjecture.

1° $f(x) = x^2\, e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$ donc $f'(x) = 2\,x\,e^{x-1} + x^2\,e^{x-1} - \dfrac{1}{2} \times 2\,x$ soit $f'(x) = x\,(2 + x)\,e^{x-1} - x = x\,g(x)$

2° *a*. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g(x) = x\,e^{x-1} + 2\,e^{x-1} - 1$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$

b) $g'(x) = (x + 3)\,e^{x-1}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$ d'où le signe de $g'(x)$:

si $x < -3$, $g'(x) < 0$; si $x = -3$, $g'(x) = 0$; si $x > -3$, $g'(x) > 0$

c)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	↘	$-e^{-4}-1$	↗	$+\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et g est strictement décroissante sur] – ∞ ; – 3] donc g ne s'annule pas sur] – ∞ ; – 3].

g est définie continue strictement croissante sur [– 3 ; + ∞ [; g([– 3 ; + ∞ [) = [$-e^{-4} - 1$; + ∞ [; 0 ∈ [$-e^{-4} - 1$; + ∞ [donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur [– 3 ; + ∞ [.

g est strictement croissante sur [– 3 ; + ∞ [et $g(0{,}20) < 0$ et $g(0{,}21) > 0$ donc $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$

e) g est strictement croissante sur [– 3 ; + ∞ [et $g(\alpha) = 0$ donc si $-3 \le x < \alpha$ alors $g(x) < 0$; si $x = \alpha$ alors $g(x) = 0$; si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3° *a*. $f'(x) = x\,g(x)$ donc

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) sur] – ∞ ; 0], f est croissante, sur [0 ; α] , f est décroissante, sur [α ; + ∞ [, f est décroissante.

c) On avait supposé f être strictement croissante sur $\mathbb{R}$, or f est décroissante sur [0 ; α], donc la première conjecture est fausse.

Partie B : Contrôle de la deuxième conjecture.

1° α est solution de $g(x) = 0$ donc $(\alpha + 2)\,e^{\alpha - 1} - 1 = 0$, et $0{,}2 < \alpha$ donc $\alpha + 2 \neq 0$ et $e^{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha + 2}$

$f(\alpha) = \alpha^2\,e^{\alpha-1} - \dfrac{1}{2}\alpha^2$ soit $f(\alpha) = \alpha^2\,\dfrac{1}{\alpha+2} - \dfrac{1}{2}\alpha^2 = \alpha^2\left(\dfrac{1}{\alpha+2} - \dfrac{1}{2}\right) = \alpha^2\,\dfrac{2 - (\alpha+2)}{2\,(\alpha+2)}$ donc $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2\,(\alpha+2)}$

2° *a*) $h(x) = \dfrac{-x^3}{2\,(x+2)} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^3}{(x+2)}$ soit $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 2$ alors $h'(x) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3\,x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2}$

$h'(x) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^2\,[\,3\,(x+2) - x]}{(x+2)^2} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^2\,(2\,x+6)}{(x+2)^2}$ soit $h'(x) = -\dfrac{x^2\,(x+3)}{(x+2)^2}$

sur] 0 ; 1] $\dfrac{x^2\,(x+3)}{(x+2)^2} > 0$ donc $h'(x) < 0$ et $h'(0) = 0$ donc h est strictement décroissante sur [0 ; 1].

b) h est strictement décroissante sur [0 ; 1] donc comme $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$ alors $h(0{,}20) > h(\alpha) > h(0{,}21)$

or $h(\alpha) = f(\alpha)$ donc $-0{,}0021 < h(0{,}21) < f(\alpha) < h(0{,}20) < -0{,}0018$ soit $-0{,}0021 < f(\alpha) < -0{,}0018$

3° *a*) $f(x) = x^2\,e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2} = x^2\,(e^{x-1} - \dfrac{1}{2})$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\,(e^{x-1} - \dfrac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{x-1} - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 - \ln 2$

b)

x	$-\infty$		0		$1-\ln 2$		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$e^{x-1} - \dfrac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

donc f est en-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;\,1-\ln 2]$ et au-dessus sur $[1-\ln 2\,;\,+\infty[$.

c) $1 - \ln 2 > 0$ donc la deuxième conjecture est fausse.

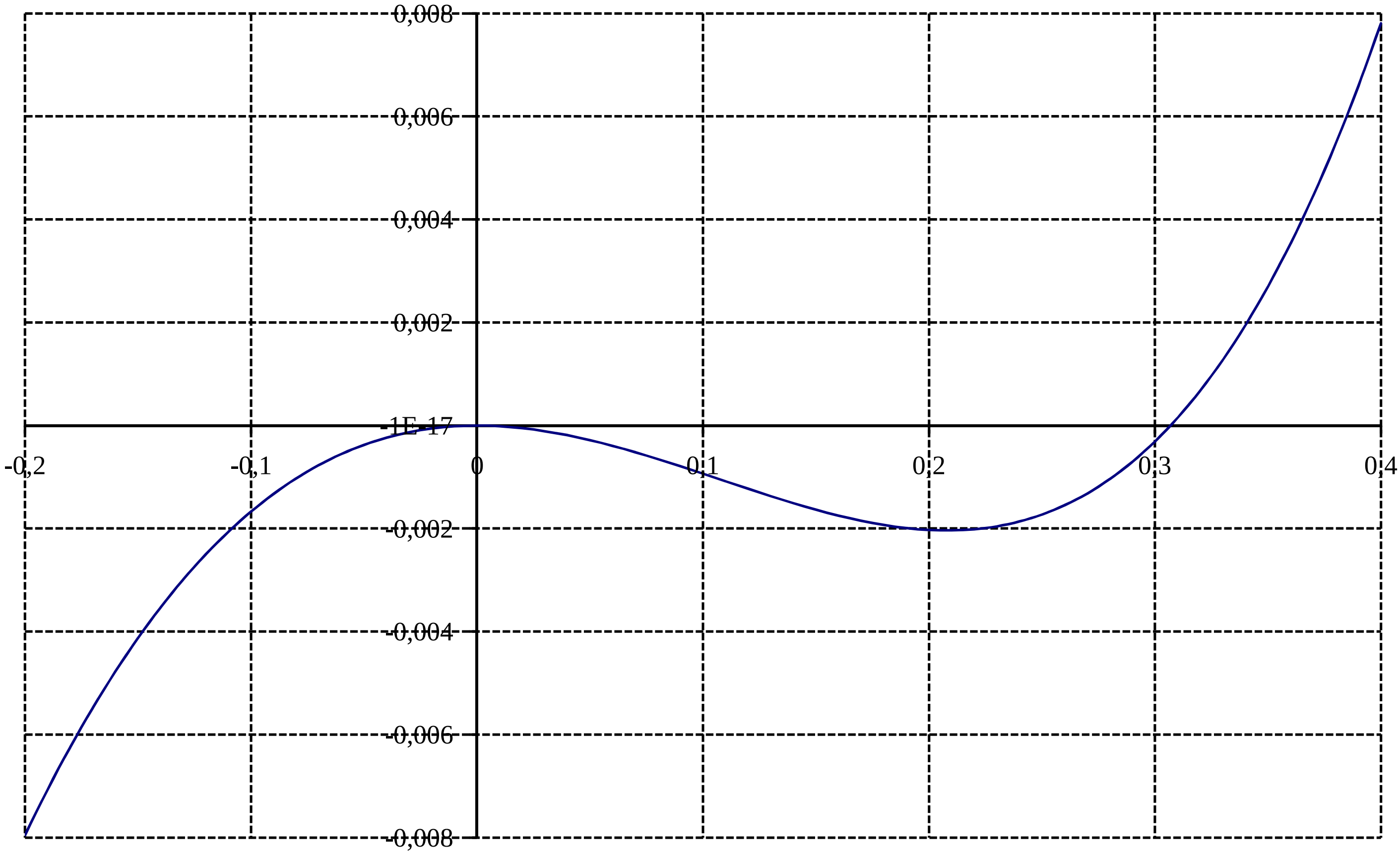
Partie C : Tracé de la courbe.

1°

x	$-0{,}20$	$-0{,}15$	$-0{,}10$	$-0{,}05$	0	$0{,}05$
$f(x)$	$-80.\,10^{-4}$	$-41.\,10^{-4}$	$-17.\,10^{-4}$	$-4.\,10^{-4}$	$0.\,10^{-4}$	$-3.\,10^{-4}$

x	$0{,}10$	$0{,}15$	$0{,}20$	$0{,}25$	$0{,}30$	$0{,}35$	$0{,}40$
$f(x)$	$-9.\,10^{-4}$	$-16.\,10^{-4}$	$-20.\,10^{-4}$	$-17.\,10^{-4}$	$-3.\,10^{-4}$	$27.\,10^{-4}$	$78.\,10^{-4}$

2°-



Partie D : Calcul d'aire.

1° La fonction $t \longrightarrow t^2\,e^t$.est continue sur R donc G est la primitive nulle en 0 de la fonction $t \longrightarrow t^2\,e^t$.

$u(t) = t^2$ $\quad u'(t) = 2\,t$

$v'(t) = e^t$ $\quad v(t) = e^t$ donc $G(x) = \left[t^2\,e^t\right]_0^x - 2\displaystyle\int_0^x t\,e^t\,dt = x^2\,e^x - 2\int_0^x t\,e^t\,dt$

$u(t) = t$ $\quad u'(t) = 1$

$v'(t) = e^t$ $\quad v(t) = e^t$

$\displaystyle\int_0^x t\,e^t\,dt = \left[t\,e^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\,dt$ donc $\displaystyle\int_0^x t\,e^t\,dt = x\,e^x - \left[e^t\right]_0^x = x\,e^x - (e^x - 1) = (x-1)\,e^x + 1$

donc $G(x) = x^2\,e^x - 2\,[\,(x-1)\,e^x + 1\,]$ soit $G(x) = (x^2 - 2\,x + 2)\,e^x - 2$

Une primitive est connue à une constante près donc la fonction $x \longrightarrow (x^2 - 2\,x + 2)\,e^x$ est une primitive de la fonction $x \longrightarrow x^2\,e^x$.

2° $f(x) = x^2 e^{x-1} - -\dfrac{x^2}{2} = x^2 e^x e^{-1} - \dfrac{1}{2}x^2$ donc $F(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x e^{-1} - \dfrac{1}{6}x^3$

$F(x) = [(x-1)^2 + 1] e^{x-1} - \dfrac{1}{6}x^3$

3° f est négative sur [0 ; 1 – ln 2] donc $A = \int_0^{1-\ln 2} -f(t)\,dt = -F(1-\ln 2) + F(0)$

$A = -[(\ln 2)^2 + 1] e^{-\ln 2} + \dfrac{1}{6}(1-\ln 2)^3 + e^{-1}$

$A = -\dfrac{1}{2}[(\ln 2)^2 + 1] + \dfrac{1}{6}(1-\ln 2)^3 + e^{-1}$

A est exprimé en unités d'aires.
or sur l'axe $(x'x)$: 1 cm représentera 0,05 donc 1 unité correspond à 20 cm et sur l'axe $(y'y)$: 1 cm représentera 0,001 donc 1 unité correspond à 1000 cm donc 1 unité d'aire correspond à 20 000 cm^2

$A = [-\dfrac{1}{2}[(\ln 2)^2 + 1] + \dfrac{1}{6}(1-\ln 2)^3 + e^{-1}] \times 20\,000 \approx 7$ cm^2