Liban juin 2009

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

2. Placer les points A, B et C.

3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\,i\,z^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. *a.* Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

b. Placer les points A', B' et C'.

c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.

a. Déterminer les affixes des points G et G′.

b. Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

(On ne demande pas de tracer cette parabole)

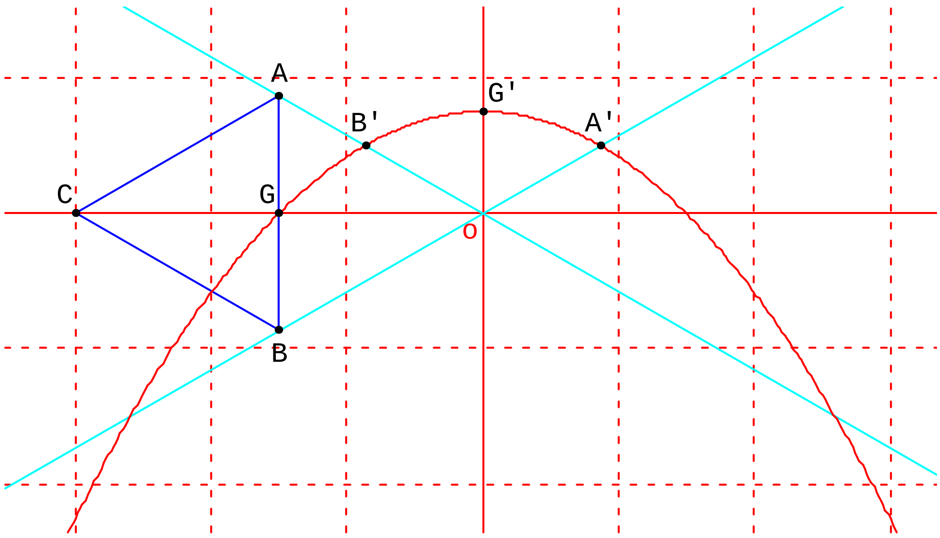
CORRECTION

Partie A

1. $z_A = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$z_A = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ donc $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

2.



3. $AB^2 = |z_A - z_B|^2 = \left|\sqrt{3}\,i\right|^2 = 3$

$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = \left|-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right|^2 = 3$

$AC^2 = |z_A - z_C|^2 = \left|\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right|^2 = 3$ donc

AB = AC = BC, le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

1. *a.* $z_A = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ donc $z_{A'} = \frac{1}{3}\,i \times 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}\times 2}$ or $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = \sqrt{3}\,e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ donc $z_{B'} = \frac{1}{3}\,i \times 3\,e^{i\frac{-5\pi}{6}\times 2}$ or $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{-5\pi}{3}} = e^{i\frac{-7\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_{C'} = \frac{1}{3}\,i \times (-3) = -i = e^{i\frac{-\pi}{2}}$

c. $z_A = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_{B'} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ donc $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{OB'}$, les points O, A et B' sont alignés.

$z_B = \sqrt{3}\,e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ et $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ or $\frac{-5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \pi$ donc $z_B = -\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $\overrightarrow{OB'} = -\sqrt{3}\,\overrightarrow{OA}$, les points O, A' et B sont alignés.

2. *a.* G est l'isobarycentre des points O, A, B et C donc :$z_G = \frac{1}{4}(z_O + z_A + z_B + z_C) = -\frac{3}{2}$.

G' a pour affixe $z_{G'} = \frac{1}{3}\,i\,{z_G}^2 = \frac{3}{4}i$

b. L'isobarycentre des points O', A', B' et C' a pour affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{4}(z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'})$

$z' = \frac{1}{4}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + 3\,i\right)$ soit $z' = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 3\,i\right) = i$

$z' \neq z_{G'}$ donc G' n'est pas l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.

3. La droite (AB) est la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$.

Si M est un point de la droite (AB) alors M a pour coordonnées $(-1{,}5\ ;\ y)$ donc pour affixe $z = -1{,}5 + i\,y$ ($y \in \mathbb{R}$)

M' = f (M) a pour affixe $z' = \frac{1}{3}\,i\,z^2 = \frac{1}{3}\,i\,(1{,}5 + i\,y)^2$

$z' = \frac{1}{3}\,i\,(2{,}25 - y^2 + 3\,i\,y) = -y + i\left(0{,}75 - \frac{1}{3}y^2\right)$ donc M' a pour coordonnées $(x'\ ;\ y')$ avec $x' = -y$ et $y' = 0{,}75 - \frac{1}{3}y^2$

donc $y' = 0{,}75 - \frac{1}{3}x'^2$ donc M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.