France-La Réunion septembre 2006

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M et M′ d'affixes respectives z et z'.

On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.
On rappelle que $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\,\bar{z}) = 0$.

2. Montrer que les points O, M et M′ sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}\,(z'\,\bar{z}) = 0$.

Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?

4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.

On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

a. Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)} = -\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2$

b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

CORRECTION

1. $z'\,\bar{z} = (x'+\mathrm{i}\,y')\,(x-\mathrm{i}\,y) = x\,x' + y\,y' + \mathrm{i}\,(x'\,y - y\,x')$

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{OM'} = 0 \Leftrightarrow x\,x' + y\,y' = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z'\,\bar{z}) = 0$.

2. O, M et M′ sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow x' = k\,x$ et $y' = k\,y$ avec k réel

$\Leftrightarrow x'\,y = k\,x\,y$ et $y'\,x = k\,x\,y$ avec k réel

$\Leftrightarrow x'\,y = y'\,x \Leftrightarrow x'\,y - y'\,x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(z'\,\bar{z}) = 0$.

Applications

3. $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z'\,\bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}[(z^2 - 1)\,\bar{z}] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}[(z^2\,\bar{z} - \bar{z}] = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}[(x + \mathrm{i}\,y)\,(x^2 + y^2) - (x - \mathrm{i}\,y)] = 0$

$\Leftrightarrow x\,(x^2 + y^2) - x = 0$

$\Leftrightarrow x\,(x^2 + y^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ M appartient à l'axe des imaginaires ou au cercle de centre O de rayon 1.

4. *a.* $\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)} = \left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\overline{z^2}\,\overline{\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)} = -\overline{z^2}\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)\overline{\left(1-\dfrac{1}{z^2}\right)}\ \left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)} = -\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2$

b. $-\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2 = -(x-\mathrm{i}\,y)^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2$

$-\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2 = -\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2\ (x^2 - y^2 - 2\,\mathrm{i}\,x\,y)$

or $\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2$ est un réel positif ou nul donc $\mathrm{Im}\left(-\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2\right) = 2\,x\,y\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2$

les points O, N et P sont alignés $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\left[\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}\right] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(-\bar{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2\,x\,y\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ ou $|z^2 - 1| = 0$ avec $z \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ ou $z^2 - 1 = 0$ avec $z \neq 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1)$ avec $z \neq 0$

L'ensemble des points M tels que les points O, N et P sont alignés est formé de la réunion des droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ privées de O.