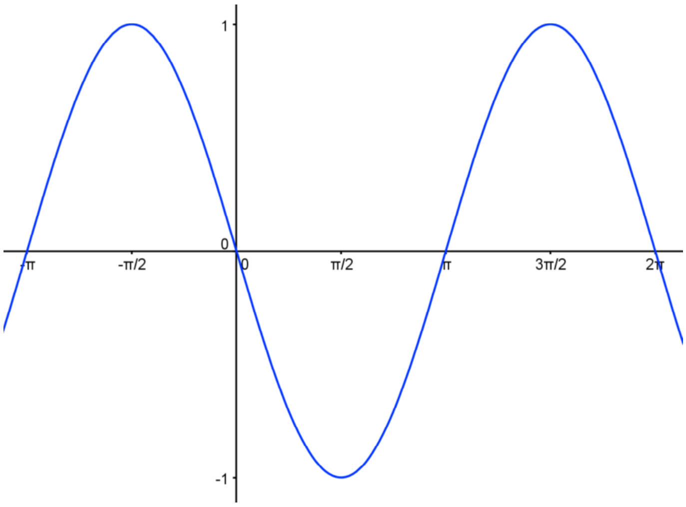
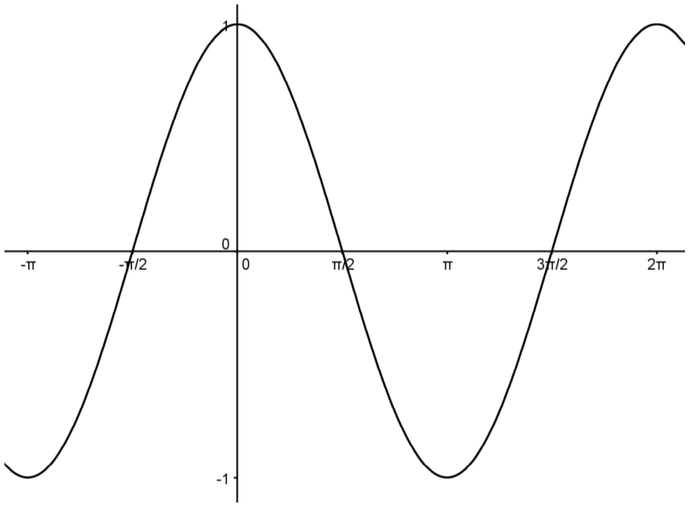
Exercice 3 (partiel) VRAI ou FAUX?
Indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

On considère une fonction f , sa dérivée $f\ '$ et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.
Proposition 3 *: « La courbe* 3 *ci-dessous est la représentation graphique de f ».*

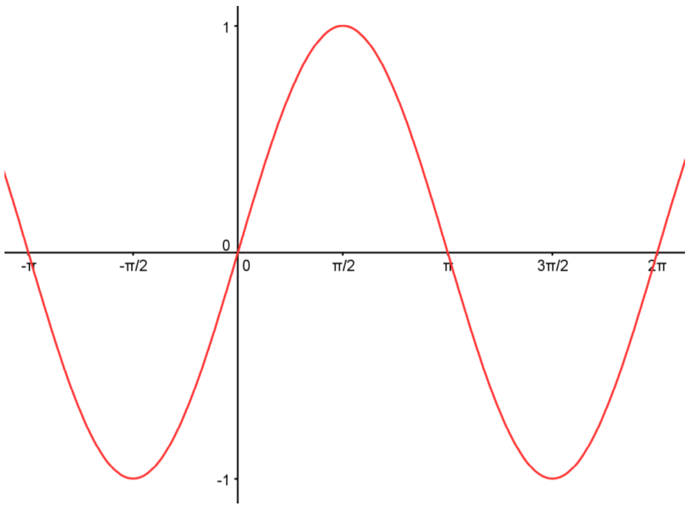
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



EXERCICE 4
Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f\ (x) = x\ \mathrm{e}^{x}$.
On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\,)$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].
Sur la courbe C , tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe C .On a placé les points A'(a ; 0) et B'(1 ; 0).
Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 1$.

1. L'intégration par parties n'est plus au programme, cette question peut-être modifiée ainsi :
Dériver la fonction définie sur [0 ; 1] par $g(x) = x\ \mathrm{e}^{x}$. En déduire une primitive de g.

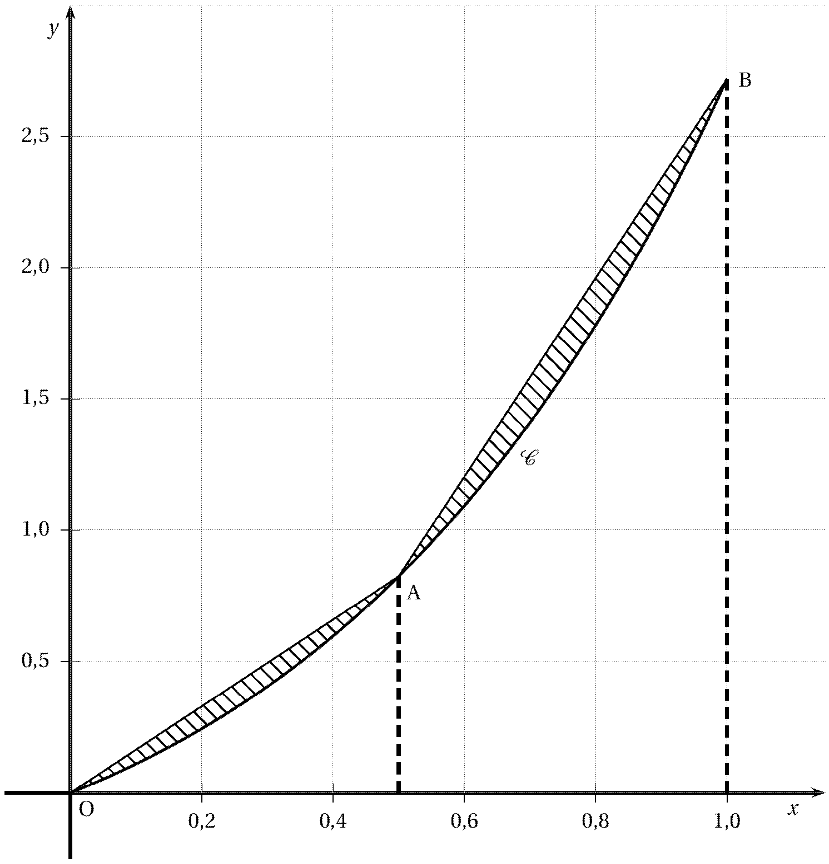
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 1$.

2. *a.* Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\dfrac{1}{2}(-a^2\ \mathrm{e}^{a} + a\ \mathrm{e}^{a} - a\ \mathrm{e} + \mathrm{e}\,)$.

b. En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}(\,a\ \mathrm{e}^{a} - a\ \mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\,)$.

PARTIE B :
Soit g la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $g\ (x) = x\ (\ \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}) + \mathrm{e} - 2$.
1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de [0 ; + ∞ [.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur [0 ; + ∞ [par $g''(x) = (2 + x)\ \mathrm{e}^{x}$.

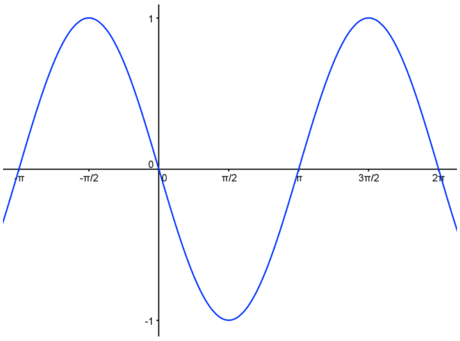
2. En déduire les variations de la fonction g ' sur [0 ; + ∞ [.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; + ∞ [.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur [0 ; + ∞ [.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.
Donner cette valeur de a.



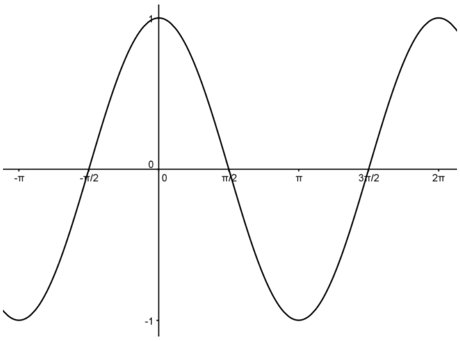
CORRECTION

EXERCICE 3
FAUX
La fonction F s'annule en 0 donc sa courbe représentative est soit la courbe 1 soit la courbe 3, de plus F étant une primitive de f alors F' = f
Si la courbe 3 représente la fonction f , alors la courbe 1 représente F.
f est alors positive sur [0 ; π], or f = F' donc F est croissante sur [0 ; π] ce qui n'est pas le cas de la fonction représentée par la courbe 1 donc la courbe 3 représente F, F est alors croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc sa dérivée f est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc la courbe représentative de f est la courbe 2 donc par élimination la courbe représentative de f ' est la courbe 1.

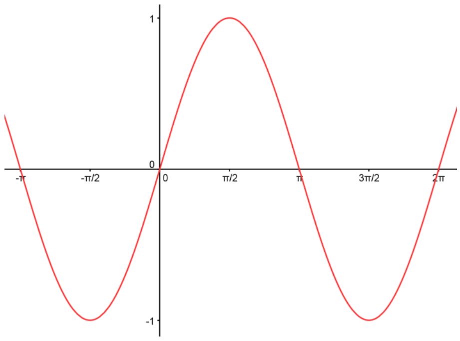
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



EXERCICE 4
PARTIE A :

1. Par intégration par parties, en posant $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^x & u(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\,x\,\mathrm{e}^x\,\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\,x\,\mathrm{e}^x\,\right]_0^1 - \left[\,\mathrm{e}^x\,\right]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$

1. modifiée

$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x & u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $g'(x) = x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. donc $g(x) = g'(x) - \mathrm{e}^x$ Une primitive de g est la fonction G définie sur [0 ; 1] par $\mathrm{G}(x) = g(x) - \mathrm{e}^x$ soit $\mathrm{G}(x) = (\,x - 1\,)\,\mathrm{e}^x$

$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{G}(1) - \mathrm{G}(0) = 0 - (\,-\mathrm{e}^0\,) = 1$

2. *a.* La fonction f est positive sur [0 ; 1] donc l'aire du triangle OAA' est égale $\frac{1}{2}\mathrm{OA'} \times \mathrm{AA'} = \frac{1}{2} a\,f(a) = \frac{1}{2} a^2\,\mathrm{e}^a$

L'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{\mathrm{AA'} + \mathrm{BB'}}{2} \times \mathrm{A'B'}$

$\mathrm{A}_{\mathrm{ABB'A'}} = \frac{1}{2}(f(a) + f(1)) \times (1 - a) = \frac{1}{2}(a\,\mathrm{e}^a + \mathrm{e})\,(1 - a)$, en développant : l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{1}{2}(\,-a^2\,\mathrm{e}^a + a\,\mathrm{e}^a - a\,\mathrm{e} + \mathrm{e}\,)$.

b. En décomposant l'aire hachurée en une somme de deux aires :
L'aire de la partie du plan hachurée est égale à

$\mathrm{A}_{\mathrm{OAA'}} + \mathrm{A}_{\mathrm{ABB'A'}} - \int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2} a^2\,\mathrm{e}^a + \frac{1}{2}(\,-a^2\,\mathrm{e}^a + a\,\mathrm{e}^a - a\,\mathrm{e} + \mathrm{e}\,) - 1.$

L'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}(\,a\,\mathrm{e}^a - a\,\mathrm{e} + \mathrm{e}\,) - 1$ soit $\frac{1}{2}(\,a\,\mathrm{e}^a - a\,\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\,)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $g(x) = x\,(\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) + \mathrm{e} - 2$.

1. e est une constante donc $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} & u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$

donc $g'(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) + x\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,(1 + x) - \mathrm{e}$

si $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x & u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v(x) = 1 + x & v'(x) = 1 \end{cases}$ alors $g''(x) = \mathrm{e}^x\,(1 + x) + \mathrm{e}^x$

donc $g''(x) = (2 + x)\,\mathrm{e}^x$.

2. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $x \geq 0$ donc $2 + x > 0$ donc $g''(x) > 0$, la fonction g' est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

3. $g'(0) = 1 - \mathrm{e}$ donc $g'(0) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x\,(1 + x) - \mathrm{e} = +\infty$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$

la fonction g' est définie, strictement croissante sur [0 ; + ∞ [, $g'([\,0 ; +\infty\,[) = [1 - \mathrm{e} ; +\infty\,[$ donc $0 \in g'([\,0 ; +\infty\,[)$; donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; + ∞ [.
$g'(0{,}5) \approx -0{,}245$ et $g'(0{,}6) \approx 0{,}197$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$, une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,6.

4. g' est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [, et $g'(\alpha) = 0$
donc si $0 \leq x < \alpha$ alors $g'(x) < 0$ et si $x > 0$ alors $g'(x) > 0$

x	0		α		+ ∞
$g'(x)$		–	0	+	
g	– 2	↘	$g(\alpha)$	↗	+ ∞

5. L'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}(\,a\,(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}) + \mathrm{e} - 2\,)$ soit $\frac{1}{2} g(a)$.

D'après la partie B, la fonction g admet un minimum en α donc l'aire de la partie du plan hachurée est minimale quand $a = \alpha$.