Partie A
On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

```
Entrée
    Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
    Affecter à U la valeur 0
    Pour k allant de 0 à N – 1
        Affecter à U la valeur 3 U – 2 k + 3
    Fin pour
Sortie
Afficher U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Partie B
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. *a*. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
b. Justifier que $n_0 \leq 3p$
c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

CORRECTION

Partie A
N – 1 = 2 donc k varie de 0 à 2

		Etape 1	Etape 2	Etape 3
k		0	1	2
U	0	$3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$	$3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$	$3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

L'affichage en sortie lorsque N = 3 est 29

Partie B
1. $u_1 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$

2. *a*. Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \geq 0$
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n, si $u_n \geq n$ alors $u_{n+1} \geq n + 1$.
$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$, or $u_n \geq n$ donc $3u_n \geq 3n$ donc $u_{n+1} \geq 3n - 2n + 3$ soit $u_{n+1} \geq n + 1$.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$ donc d'après les théorèmes de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$ donc $u_n - n \geq 0$, donc $2(u_n - n) + 3 \geq 3$
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$, la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = u_{n+1} - n$
$v_{n+1} = 3u_n - 3n + 3 = 3v_n$.
la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 3^n$.

b. pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 3^n$ or $v_n = u_n - n + 1$ donc $u_n = v_n + n - 1$ soit, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$

5. *a*. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc pour tout entier naturel non nul p, il existe un entier naturel n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq 10^p$.

b. si $n \geq 3p$ alors, pour tout entier p non nul, $u_n \geq 3^{3p} + 3p - 1 \geq 3^{3p}$.
$u_n \geq 27^p$ or $27 \geq 10$ donc $27^p \geq 10^p$ donc si $n \geq 3p$ alors $u_n \geq 10^p$
n_0 est le plus petit entier tel que $u_n \geq 10^p$ donc $3p \geq n_0$.

c. si $p = 3$, $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ or la suite (u_n) est croissante donc si $n \geq 7$ alors $u_n \geq 10^3$ donc $n_0 = 7$.

d.

Entrée Saisir le nombre entier naturel non nul p. **Traitement** Affecter à n la valeur 0 Tant que $3^{3p} + 3p - 1 < 10^p$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant Que **Sortie** Afficher n