Antilles Guyane juin 2013

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble ℕ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0 \; ; \; v_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        u, v et w des nombres réels
                   N et k des nombres entiers
Initialisation :   u prend la valeur 0
                   v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
        w prend la valeur u
        u prend la valeur (w + v)/2
        v prend la valeur (w + 2 v)/3
FinPour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A^n X_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A\, X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix},\; P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le produit P P'.

On admet que P' B P = A. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'\, B^n\, P$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. *a.* Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

Antilles Guyane septembre 2013
Partie A
On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        | Affecter à X la valeur X – 26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Partie B
On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

• **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

• **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\left| \begin{array}{l} z_1 \equiv y_1 (26) \text{ avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv y_2 (26) \text{ avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{array} \right.$

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :
$\text{RE} \to \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \to \text{DP}$
Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 & (26) \end{cases}$.

b. En déduire que $x_1 \equiv x'_1$ (26) et $x_2 \equiv x'_2$ (26) puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice $C' \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv y_1 (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 \equiv y_2 (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{array} \right.$.

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $x1$ et $x2$, les nombres entiers tels que $\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv y'_1 (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 \equiv y'_2 (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{array} \right.$

Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 & (26) \end{cases}$.

Conclure.

4. Décoder QC.

Asie juin 2013

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.

Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle O E ′ F ′ G ′, appelé image de OEFG.

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

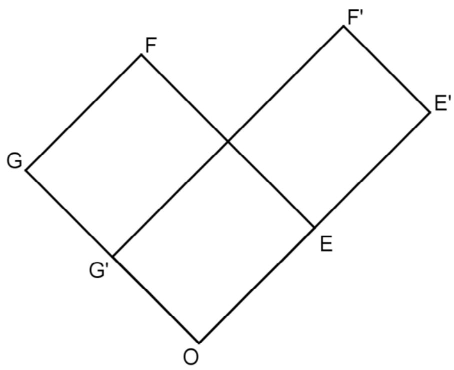


Figure 1

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), (– 1 ; 5) et (– 3 ; 3).

La transformation du logiciel associe à tout point M(x ; y) du plan le point M′ (x' ; y'), image du point M tel que : $\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$

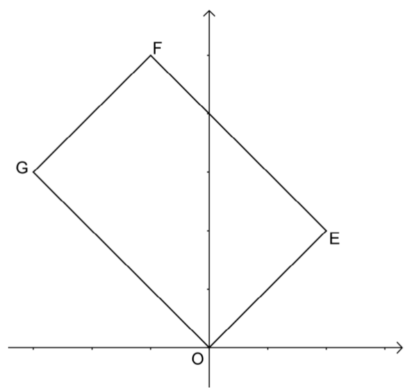


Figure 2

1. ***a.*** Calculer les coordonnées des points E′, F′, et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives. Une erreur a été commise. Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur − 1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n\,(x_n\,;\,y_n)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, où $(x_{n+1}\,;\,y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}. Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. ***a.*** Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ du point E_n vérifient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Centres étrangers juin 2013

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.

Au début de l'année 1013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce pressante sur l'île A et 10 millions sur l'île B.

des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, immigration entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes.

Sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;

Sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année (2013 + n).

Partie A algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

```
Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
    Affecter à c la valeur (0,8 a + 0,3 b)
    Affecter à b la valeur (0,2 a + 0,7 b)
    Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme
```

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

```
***Algorithme lancé***
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5
En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75
En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875
En l'année 2018, a prend la valeur 18,0625 et b prend la valeur 11,9375
En l'année 2019, a prend la valeur 18,03125 et b prend la valeur 11,96875
En l'année 2020, a prend la valeur 18,015625 et b prend la valeur 11,984375
***Algorithme terminé***
```

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suite (a_n) et (b_n).

Partie B Partie mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\,U_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

On admet que $U_n = M^n\,U_0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}6-0{,}6\times 0{,}5^n \\ 0{,}4-0{,}4\times 0{,}5^n & 0{,}4+0{,}6\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.

3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geq 1$.
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un certain nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

Liban juin 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 : $u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 6\,u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

```
Variables :        a, b et c sont des nombres réels
                   i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :   a prend la valeur 3
                   b prend la valeur 8
Traitement :       Saisir n
                   Pour i variant de 2 à n faire
                       | c prend la valeur a
                       | a prend la valeur b
                       | b prend la valeur …
                   Fin Pour
Sortie :           Afficher b
```

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	u_n
7	4 502
8	13 378
9	39 878
10	119 122
11	356 342
12	1 066 978
13	3 196 838
14	9 582 322
15	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = A\,C_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n\,C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer Q P.

On admet que $A = P\,D\,Q$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P\,D^n\,Q$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

Métropole juin 2013

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

• l'effectif de la population est globalement constant,

• chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année (2013 + n) et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = A\,X$.

Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A\,X_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P Q et Q P. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1} A P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$A^n = P D^n P^{-1}.$$

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0{,}94^n)\, v_0 + \frac{1}{6}(1 - 5 \times 0{,}94^n)\, c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

Métropole septembre 2013

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'*une de* l'*autre*

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.

Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

M : « l'individu est malade et infecté ».

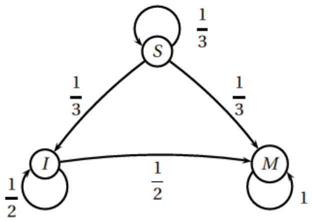
Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

— parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,

— parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \;\; i_n \;\; m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.

On a alors $P_0 = (0{,}99 \;\; 0 \;\; 0{,}01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{3} s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{2} i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{2} i_n + m_n \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition : $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \;\; I_n \;\; M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0{,}01 \;\; 0{,}10 \;\; 0{,}89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. *a.* Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b. Interpréter ce résultat en termes d'évolution de la maladie.

Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

Polynésie juin 2013

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A le n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B le n-ième année après 2013.

Ainsi $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7\, a_n + 0{,}2\, b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1\, a_n + 0{,}6\, b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices M = $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et P = $\begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n ; on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. *a*. Déterminer U_1.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que la matrice I – M est inversible et préciser son inverse.

c. Déterminer la matrice U telle que U = M × U + P.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on pose $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}.$$

a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Pondichéry avril 2013

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125\, j_n + 0{,}525\, a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625\, j_n + 0{,}625\, a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

1. *a*. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{U}_n$.
b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.
2. On introduit les matrices suivantes :

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. On admet que la matrice Q est inversible et que :

$$\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathrm{Q} \times \mathrm{D} \times \mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{A}$.
b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $\mathrm{A}^n = \mathrm{Q} \times \mathrm{D}^n \times \mathrm{Q}^{-1}$.
c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.
3. On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 0{,}3 + 0{,}7 \times (-0{,}25)^n & 0{,}42 - 0{,}42 \times (-0{,}25)^n \\ 0{,}5 - 0{,}5 \times (-0{,}25)^n & 0{,}7 + 0{,}3 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}$$

a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.
b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?