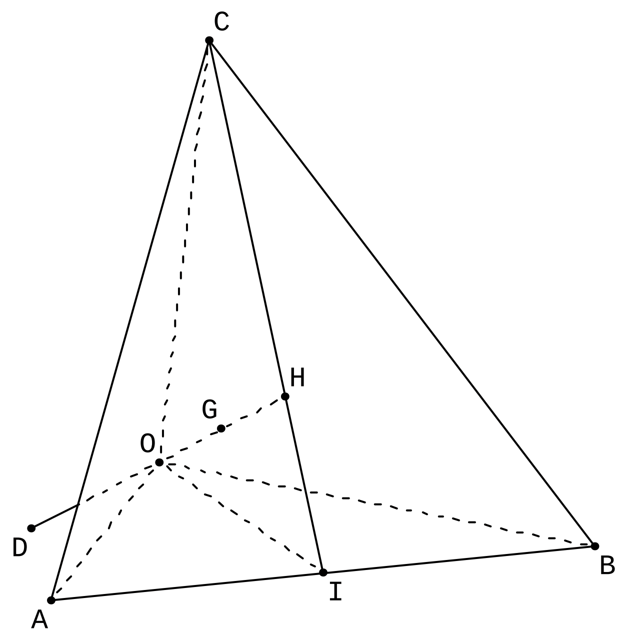
Soit $a$ un réel ($a > 0$) et OABC un tétraèdre tel que OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O
OA = OB = OC = $a$
On appelle :

- I le pied de la hauteur issue de C du triangles ABC,
- H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC
- D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal : $\left(O\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{OA}\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{OB}\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

1. démontrer que H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$. Que peut on dire du point H pour le triangle ABC ?
2. démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier
3. Soit G le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que G est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

**CORRECTION**




1. OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O donc $AC^2 = OA^2 + OC^2 = 2a^2$ de même $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 2a^2$ et $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2a^2$ donc AB = AC = BC, le triangle ABC est équilatéral.

I est le projeté orthogonal de C que (AB) donc I est le milieu de [AB] donc I a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Soit ($x$ ; $y$ ; $z$) les coordonnées de H, $\overrightarrow{IC}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};a\right)$

$\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IC}$ donc $-\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}y+a\,z=0$ soit $x + y - 2z = 0$

H appartient à (IC) donc il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{CH} = k\,\overrightarrow{CI}$ soit $\begin{cases} x = k\,\frac{a}{2} \\ y = k\,\frac{a}{2} \\ z - a = -k\,a \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = k\,\frac{a}{2} \\ y = k\,\frac{a}{2} \\ z = a - k\,a \end{cases}$

or $x + y - 2z = 0$ donc en remplaçant : $k\,\frac{a}{2}+k\,\frac{a}{2}-2\,(a-k\,a)=0$ soit $k\,a - 2\,a + 2\,k\,a = 0$

$3\,k\,a = 2\,a$ donc $k = \frac{2}{3}$ donc en remplaçant dans $\begin{cases} x = k\,\frac{a}{2} \\ y = k\,\frac{a}{2} \\ z = a - k\,a \end{cases}$, H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$.

A a pour coordonnées ($a$ ; 0 ; 0) B (0 ; $a$ ; 0) et C(0 ; 0 ; $a$) donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées ($a$ ; $a$ ; $a$)
donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\ \overrightarrow{OH}$ donc H est l'isobarycentre (centre de gravité) du triangle ABC.

2. $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$ donc D a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{3} ; -\frac{a}{3} ; -\frac{a}{3}\right)$.

$AB^2 = AC^2 = BC^2 = 2\,a^2$

$BD^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{16\,a^2}{9} + \frac{a^2}{9} = 2\,a^2$

$AD^2 = \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = 2\,a^2$

$CD^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 = 2\,a^2$

donc AB = AC = AD = BC = BD = CD donc le tétraèdre ABCD est régulier.

3. G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD donc GA = GB donc G appartient au plan médiateur $\Pi_1$ du segment [AB], de même G appartient au plan médiateur $\Pi_2$ du segment [AC] donc à la droite $\Delta$ intersection de ces deux plans.
OA = OB donc $O \in \Pi_1$ de plus OA = OC donc $O \in \Pi_2$ donc à leur intersection $\Delta$
H est le centre de gravité du triangle équilatéral ABC donc est le centre de son cercle circonscrit donc HA = HB et HA = HC donc $H \in \Pi_1$ et $H \in \Pi_2$ donc à leur intersection $\Delta$, $O \neq H$ donc $\Delta = (OH)$
G appartient donc à (OH)

Soit ($x$ ; $y$ ; $z$) les coordonnées de G, $\overrightarrow{OH}$ a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3} ; \frac{a}{3} ; \frac{a}{3}\right)$

G appartient à (OH) donc il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{OG} = k\,\overrightarrow{OH}$ soit $\begin{cases} x = k\,\frac{a}{3} \\ y = k\,\frac{a}{3} \\ z = k\,\frac{a}{3} \end{cases}$

G est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD donc GA = GD

donc $\left(k\,\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(k\,\frac{a}{3}\right)^2 + \left(k\,\frac{a}{3}\right)^2 = \left(k\,\frac{a}{3} + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(k\,\frac{a}{3} + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(k\,\frac{a}{3} + \frac{a}{3}\right)^2$

$(k - 3)^2 + k^2 + k^2 = 3\,(k + 1)^2 \Leftrightarrow 3\,k^2 - 6\,k + 9 = 3\,k^2 + 6\,k + 3$ donc $12\,k = 6$ soit $k = \frac{1}{2}$

G a pour coordonnées $\left(\frac{a}{6} ; \frac{a}{6} ; \frac{a}{6}\right)$