Intégration

Définition

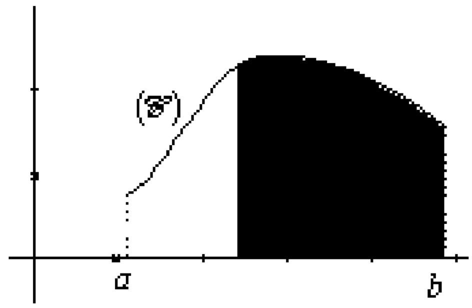
Soit f une fonction définie et ayant des primitives sur un intervalle I. a et b étant deux éléments de I, on appelle intégrale de a à b de la fonction , le nombre réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ où F est une primitive de f sur I.

On note aussi $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b$

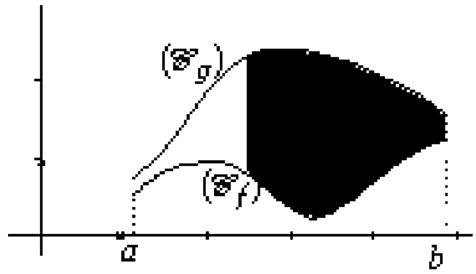
La fonction H définie par $\mathrm{H}(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en a.

Interprétation graphique

f et g sont des fonctions ayant des primitives sur $[a\,;b]$ $(a \le b)$.
Si f est positive sur $[a\,;b]$, et si C est sa courbe représentative dans un repère orthogonal, alors $\mathrm{A} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, c'est-à-dire l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que : $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.



Si pour tout $x \in [a\,;b]$ on $f(x) \le g(x)$, alors l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, c'est-à-dire l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$ est exprimée en unités d'aire par : $\int_a^b \left(f(t) - g(t)\right)\mathrm{d}t$



Propriétés

f et g sont des fonctions ayant des primitives sur les intervalles considérés.

- $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ (Relation de Chasles)
- si λ et μ sont deux réels : $\int_a^b \left(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t)\right)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- si f est une fonction **paire,** alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$
- si f est une fonction **impaire**, alors $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- si f est une fonction **périodique** de période T, alors $\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $a \le b$ et si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$
- Si $a \le b$ et si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \le g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Valeur moyenne

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$, le réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème de la moyenne

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $[a\,;b]$, $m \le f(x) \le \mathrm{M}$ alors$m\,(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le \mathrm{M}\,(b-a)$

Intégration par partie

On suppose que toutes les fonctions utilisées ont des primitives sur les intervalles considérés

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)\,v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple

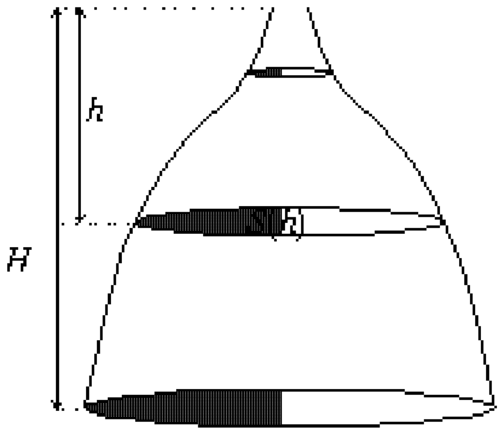
Pour calculer $\int_0^{\pi} t \sin t \, \mathrm{d}\, t$, on pose : $v(t) = t.$ $v'(t) = 1.$

$u(t) = \sin t$ $v(t) = -\cos t$

Alors $\int_0^{\pi} t \sin t \, \mathrm{d}\, t = \left[-t \cos t \right]_0^{\pi} - \int_a^b 1 \times (-\cos t) \, \mathrm{d}\, t$

Donc $\int_0^{\pi} t \sin t \, \mathrm{d}\, t = \left[-t \cos t \right]_0^{\pi} + \int_a^b \cos t \, \mathrm{d}\, t$ soit $\int_0^{\pi} t \sin t \, \mathrm{d}\, t = \left[-t \cos t \right]_0^{\pi} + \left[\sin t \right]_0^{\pi}$

$\int_0^{\pi} t \sin t \, \mathrm{d}\, t = -\pi \cos \pi - (0 \cos 0) + \sin \pi - \sin 0$ donc $\int_0^{\pi} t \sin t \, \mathrm{d}\, t = \pi$



Calcul de volumes

Pour un volume V de hauteur H dont la section avec un plan à la hauteur a pour aire S(h), on a : $\mathrm{V} = \int_0^{\mathrm{H}} \mathrm{S}(h) \, \mathrm{d}\, h$