J. Diouri

Travail, énergie

Travail d'une force

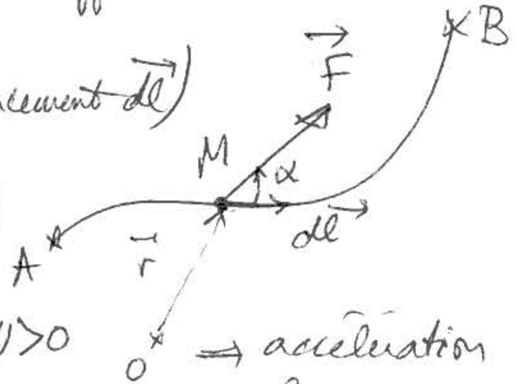
شغل القوة

C'est l'effort (énergie) fournie par la force $\vec{F}$ lorsque son point d'application se déplace.

travail élémentaire (pour un déplacement $\vec{dl}$)

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dl} \quad (= \text{scalaire})$$

$$= F.\, dl \cos\alpha$$



travail moteur (force motrice) si $dW > 0$ ⇒ accélération

travail résistant (force résistante) si $dW < 0$ ⇒ freinage

travail nul si $dW = 0$ $\alpha = \pi/2$ ⇒ pas de modification du module de la vitesse du mouvement.

Ex: Travail nul de la force centrifuge

Travail total : $W = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$ W dépend en général du trajet AB

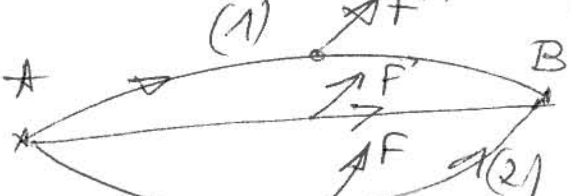
unité : le Joule.

Forces Conservatives

القوى المحافظة

Ce sont par définition des forces pour lesquelles le travail ne dépend pas du trajet

$$W(1) = W(2) = W(3)$$



Exemple. le poids, forces électriques, ..

Pour escalader une montagne, le travail total du poids (résistant) est le même quel que soit le chemin emprunté entre le départ et l'arrivée.

الشغل المبذول من قوة محافظة على أي نظام بين نقطتين لا يعتمد على المسار المقطوع بين النقطتين.

Puissance

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}(t).$$

se mesure en Watts

J. Diouri

Energie cinétique : الطاقة الحركية

$$E_C = \frac{1}{2} m V^2$$

pour un corps de masse m qui se déplace à la vitesse V(t).

Théorème de l'énergie cinétique

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{dl} = \vec{F}\cdot\vec{V}\cdot dt$$

$$m\cdot\vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V} \rightarrow m\cdot\vec{V}\cdot\vec{dV} = \vec{F}\cdot\vec{V}dt = \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

en intégrant $\Rightarrow \left(\frac{1}{2} m V^2\right)_1^2 = \int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dl}$.

ou $\left(\Delta E_C\right)_1^2 = W_1^2(\vec{F})$

la variation de l'énergie cinétique entre t_1 et t_2 est égale au travail effectué par la force entre $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$.

Attention : Valable dans un référentiel galiléen (où la loi de Newton est vérifiée). Sinon, il faut ajouter les forces d'entraînement et de Coriolis.

Pour les forces conservatives : $\int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dl} = E_p(1) - E_p(2)$

(طاقة الوضع) où E_p est l'énergie potentielle. Attention au signe.

$$\rightarrow E_C^2 - E_C^1 = E_p^1 - E_p^2$$

ou encore $E_C^2 + E_p^2 = E_C^1 + E_p^1$

On pose alors $E_C + E_p = E_m$ = Energie mécanique

$\Rightarrow$ Dans un repère galiléen, en présence de forces conservatives, l'énergie mécanique se conserve

$$\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$$

Cas général : Forces conservatives et forces dissipatives
القوى المبددة مبددة

W_d : travail des forces dissipatives (frottements)
W_c : travail des forces conservatives $= E_p^1 - E_p^2$

On a : $W = W_d + W_c = E_c^2 - E_c^1$

or $W_c = E_p^1 - E_p^2 \Rightarrow \underline{W_d = E_m^1 - E_m^2}$

|| la perte de l'énergie mécanique est mesurée par le travail des forces dissipatives.

Equilibre, stabilité

La variation de l'énergie potentielle est source de mouvement et inversement.
Pour qu'un système soit au repos, il faut que son énergie potentielle s'arrête de varier en fonction de la position : c'est la condition d'équilibre

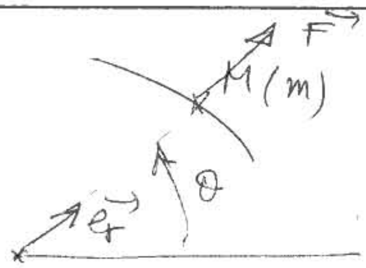
Equilibre $\Longleftrightarrow \dfrac{dE_p}{dx} = 0$ ou $dE_p = 0$ en gl

Alors la somme des forces appliquées est nulle,

$\vec{F} = 0 \Rightarrow -\overrightarrow{grad}\, E_p = 0 \Rightarrow \dfrac{dE_p}{dx} = 0$

Equilibre stable si $\dfrac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ توازن مستقر

Equilibre instable si $\dfrac{d^2E_p}{dx^2} < 0$ توازن غير مستقر



Force centrale.

$$\vec{F}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}, \quad \underset{cst}{\alpha > 0}$$

Il est clair qu'il faut utiliser les coordonnées polaires :

$$\vec{V}(\vec{r}) = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{r}\,\vec{e_r} \quad (\vec{dl} = dr\cdot\vec{e_r} + r d\theta\,\vec{e_\theta})$$

Energie Cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$

Energie potentielle : $E_p = -\int \vec{F}\cdot\vec{dl}$

Si la force est conservative

Vérifions ?

$$\vec{dl} = dr\,\vec{e_r} + r d\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dr} = \frac{\alpha}{r^2}dr.$$

$$W_1^2 = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot\vec{dr} = \alpha\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

On voit que W_1^2 ne dépend que de r_1 et r_2 et pas du chemin suivi $\rightarrow$ force conservative

et $W_1^2 = E_p^1 - E_p^2 \Rightarrow E_p(r) = \frac{\alpha}{r}$ on a pris $E(\infty) = 0$ origine de l'énergie potentielle

Energie mécanique :

$$E_M = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Moment Cinétique $\vec{\sigma_0} = \vec{OM}\wedge m\vec{V}$

$$\vec{\sigma_0} = r\vec{e_r}\wedge m(r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\vec{e_r})$$

$$= mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta} = \underline{\underline{mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}}}$$

(Attention erreur polycopié p 24)

Théorème du moment Cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = \vec{M_F} = \vec{OM}\wedge\vec{F} = r\vec{e_r}\wedge\frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma_0} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z} = \vec{Cte}$$

Vérification de la conservation de l'énergie totale,

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\alpha}{mr^2}\vec{e_r} = \vec{\gamma_r}$$

$$\text{or } \vec{\gamma_r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} \Rightarrow \frac{\alpha}{mr^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$E_M = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\frac{dE_M}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2}\dot{r} + \frac{1}{2}m(2\dot{r}\ddot{r} + 2r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta}) \quad (2)$$

$$\text{or } \gamma_\theta = 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \Rightarrow r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta}$$

En remplaçant, et en tenant compte de (1), on vérifie bien $\frac{dE_M}{dt} = 0 \Rightarrow E_M = C^{te}$.

__Exemple d'équilibre__

Considérons la force appliquée:

$$\vec{F} = \alpha\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\vec{e_x}$$

$$\text{Equilibre} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\hookrightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

__Stabilité__:

$$\frac{dE_p}{dx} = -F \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_1 = 1) = 1 - 6 + 6 = 1 > 0 \quad \underline{\text{Equil. stable}}$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_2 = 2) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{6}{2} + \frac{6}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(-2 + \frac{3}{2}\right) < 0$$

__Eq. INStable__