Soient a,b et c trois entiers relatifs.

Dire pour chacune des propositions suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Pour justifier qu'une proposition est fausse, on peut se contenter d'un contre-exemple c'est-à-dire un exemple pour lequel les hypothèses de la proposition en question sont vérifiées mais pas la conclusion…

Par contre pour justifier qu'une proposition est vraie, vous ne pouvez vous contenter d'un exemple, vous devez obligatoirement prouver qu'elle est bien vraie en conduisant un raisonnement (par récurrence, par l'absurde, par la contraposée, par disjonction des cas….)

1. Si a divise b, alors b divise a.
   Proposition fausse : 2 divise 4 mais 4 ne divise pas 2

2. Si a divise $a + b$ alors a divise b.
   Proposition vraie
   On va utiliser le fait que si un entier N_1 divise N_2 et N_3 alors N_1 divise toute combinaison linéaire de N_2 et N_3 c'est-à-dire tout entier M de la forme $uN_2 + v\,N_3$ avec u et v entiers. En particulier N_1 divise $N_2 + N_3$ et $N_2 - N_3$.
   Comme a divise N_2 et N_3 avec $N_2 = a + b$ et $N_3 = a$ alors a divise $N_2 - N_3$ c'est-à-dire b **(C.Q.F.D.)**

3. Si a divise b^2 alors a divise b
   Proposition fausse : 4 divise 6^2 mais 4 ne divise pas 6.

4. Si a divise b alors a divise b^2
   Proposition vraie
   Puisque a divise b, il existe k entier tel que $b = a\,k$
   Il en résulte que : $b^2 = a^2\,k^2 = a\,(a\,k^2) = a\,u$ avec $u = a\,k^2$ entier **(C.Q.F.D.)**

5. Si a divise b et a divise c alors a divise $b\,c$
   Proposition vraie
   Puisque a divise b et a divise c, il existe k_1 et k_2 entiers tels que $b = a\,k_1$ et $c = a\,k_2$
   Il en résulte que : $b \times c = a\,k_1 \times a\,k_2 = a\,(a\,k_1\,k_2) = a\,v$ avec $v = a\,k_1\,k_2$ entier **(C.Q.F.D.)**

6. Si a divise $b\,c$ alors a divise b ou a divise c.
   Proposition fausse :
   6 divise 2×3 mais 6 ne divise ni 2 ni 3.

(**)

On se propose de démontrer le résultat par une autre méthode :

☞ On admet que si un nombre N est divisible par 2 et par 3 alors il est divisible par 6.

1. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
2. Justifier que l'un des termes du produit est nécessairement divisible par 3
3. Montrer que si ce terme n'est pas divisible par 6, alors l'un des deux autres est divisible par 2
4. Conclure en raisonnant par disjonction des cas.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, posons : $N = n^3 - n$.

On a : $n^3 - n = n\,(n^2 - 1) = n\,(n-1)\,(n+1)$

Soit n un entier naturel, dans la division euclidienne de n par 3, le reste est égal à 0, ou 1 ou 2. En d'autres termes, ou bien $n = 3k$ ou bien $n = 3k+1$ ou bien $n = 3k+2$ avec k entier naturel.

- Si $n = 3k$, alors $N = 3k\,(n-1)\,(n+1) = 3\,(k\,(n^2-1)) = 3\,u_n$ avec $u_n = k\,(n^2-1)$ entier.
- Si $n = 3k+1$ alors $n-1$ est divisible par 3 puisque $n-1 = 3k$
  Dans ces conditions, $N = n\,(n-1)\,(n+1) = n \times 3k \times (n+1) = 3\,(k\,(n^2+n)) = 3\,v_n$ avec $v_n = k\,(n^2+n)$ entier.

- Si $n = 3k+2$, alors $n+1$ est divisible par 3 puisque $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$
  Dans ces conditions, $N = n\,(n-1)\,(n+1) = n\times(n-1)\,3(k+1) = 3\,(k+1)(n^2-n)) = 3w_n$ avec
  $w_n = (k+1)(n^2-n)$ entier.

  Par disjonction des cas, on a prouvé que N est divisible par 3.

2. Cela voudrait signifier qu'il n'est pas pair et donc son suivant ou son précédent (donc l'un des deux autres termes) est nécessairement pair et donc divisible par 2.

3. Si l'un des termes est divisibles par 6, c'est fini
Sinon l'un des deux autres est divisible par 2 et comme l'un est divisible par 3 et l'autre par 2, nécessairement il est divisible par 6 d'après **(**)**

(**) on admet que si un nombre A est divisible par 2 et par 3 alors il est divisible par 6.