1. Recopier et compléter ce tableau de congruence:

n est congru modulo 3 à	0	1	2
n^2 est congru modulo 3 à			

Soit p et q deux entiers naturels tels que $p^2 = 3q^2$.

2. A l'aide du 1., justifier que $p \equiv 0 \quad [3]$;

3. Montrer alors que q est divisible par 3.

4. En déduire que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel

CORRECTION

1. Si $n \equiv r$ modulo p alors $n^2 \equiv p^2$ modulo p donc ;

n est congru modulo 3 à	0	1	2
n^2 est congru modulo 3 à	0	1	1

puisque 4 = 3 + 1 donc 4 ≡ 1 modulo 3

2. $p^2 = 3q^2$ donc p^2 est divisible par 3 soit $p^2 \equiv 0$ modulo 3

D'après la première question :
si p n'est pas congru à 0 modulo 3 alors $p^2 \equiv 1$ modulo 3
si p est congru à 0 modulo 3 alors $p^2 \equiv 0$ modulo 3
donc si $p^2 \equiv 0$ modulo 3 alors $p \equiv 0$ modulo 3

3. $p \equiv 0$ modulo 3 donc il existe un entier n tel que $p = 3n$ donc $p^2 = 9n^2 = 3q^2$ donc $q^2 = 3n^2$
donc $q^2 \equiv 0$ modulo 3 donc d'après la première question $q \equiv 0$ modulo 3 donc q est divisible par 3.

4. Supposons que $\sqrt{3}$ soit un nombre rationnel, il existe alors deux entiers p et q ($q \neq 0$) premiers entre eux tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$.

Si $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ alors $q\sqrt{3} = p$ donc $3q^2 = p^2$.

D'après les questions précédentes, p et q sont alors divisibles par 3 donc ne sont pas premiers entre eux ce qui est en contradiction avec l'hypothèse p et q premiers entre eux donc $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel