Antilles Guyane juin 2016

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

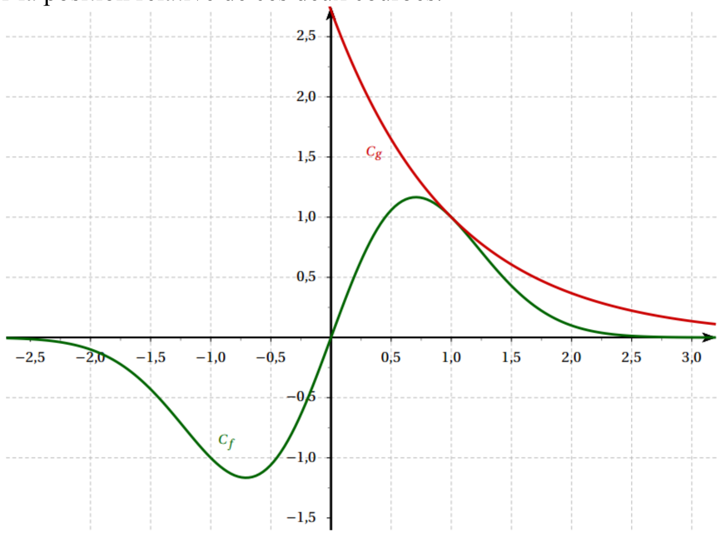
2. *a.* On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.

Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.
Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.



1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \le g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \le 0$.

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \le 0$.

4. *a.* La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.

c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$.

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. *a.* Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} & v'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{1-x^2} \end{cases}$ alors $f'(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} - x \times 2x\,\mathrm{e}^{1-x^2} = (1 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$

Pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - 2x^2$

$1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{0,5}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{0,5}$	$\searrow$	0

Partie B

1. Graphiquement : C_f est en dessous de C_g et les deux courbes sont tangentes au point de coordonnées (1 ; 1).

2. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $]-\infty ; 0]$, $f(x) \leq 0$ et $g(x) > 0$ donc, pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.

3. *a.* Pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x\,\mathrm{e}^{1-x^2} \leq \mathrm{e}^{1-x} \Leftrightarrow \ln\left(x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \leq \ln \mathrm{e}^{1-x} \Leftrightarrow \ln x + 1 - x^2 \leq 1 - x$

$\Leftrightarrow \ln x + x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0$.

b. La fonction Φ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$: la fonction $x \rightarrow \ln x$ et le polynôme $x \rightarrow -x^2 + x$ donc la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$\Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x}$ or $-2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -0,5$

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	

c. Φ est croissante sur $]0 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$ donc Φ admet un maximum en 1, $\Phi(1) = 0$ donc, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

4. *a.* Pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0$ donc pour tout réel x strictement positif, C_f est en dessous de C_g.
Pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$ donc C_f est en dessous de C_g, la conjecture est démontrée.

b. pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$ donc sur $]-\infty ; 0]$, C_f et C_g n'ont pas de point commun.
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
C_f et C_g ont un unique point commun, noté A d'abscisse 1.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$, et $g'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ donc $f'(1) = = g'(1) = -1$
Les tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse 1 sont deux droites passant par un même point A, de même coefficient directeur -1 donc sont confondues.

Partie C

1. $f(x) = -\dfrac{1}{2}u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 1 - x^2$ donc une primitive de f est F définie par $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 - \left(-\mathrm{e} + \frac{1}{2}\mathrm{e}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine compris entre C_f et C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.