Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

— A : « La pièce est produite par la machine A »

— B : « La pièce est produite par la machine B »

— D : « La pièce a un défaut ».

— $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

c. Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à 0,094.

d. On constate que la pièce choisie a un défaut.

Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Dans cette question, on prend $n = 150$.

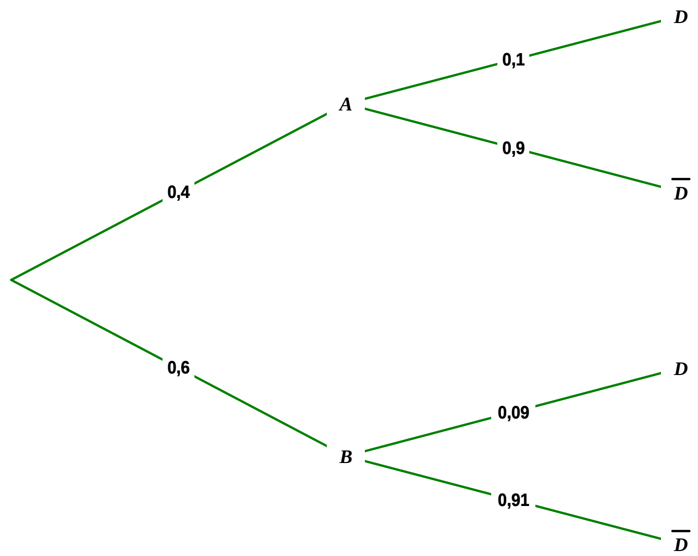
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

c. Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.

Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

CORRECTION

1. *a.*



b. $P(D \cap A) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$

c. $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = 0,04 + 0,6 \times 0,09 = 0,094$

d. $P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0,04}{0,094} = \frac{20}{47}$

2. *a.* On a une succession de n expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

succès : la pièce est conforme $p = 0,9$

échec : la pièce n'est pas conforme $q = 1 - p = 0,1$

donc la variable aléatoire X_n qui compte le nombre de pièces conformes suit une loi binomiale de paramètres (n ; 0,9).

b. Si $n = 150$ alors $n > 30$, $n\,p = 135$ donc $n\,p > 5$ et $n\,(1-p) = 15$ donc $n\,(1-p) > 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I est défini par $I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$.

Quand $p = 0,9$ et $n = 150$ on trouve $1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx 0,048$, donc $I \approx [0,852 \,;\, 0,948]$.

c. La proportion de pièces non conformes est $\frac{21}{150} = 0,14$ donc la proportion de pièces conformes est $1 - 0,14 = 0,86$

$0,86 \in [0,852 \,;\, 0,948]$ donc au regard de l'intervalle de fluctuation de la question ci -dessus, ce test ne remet pas en cause le réglage de la machine A.