Liban juin 2008
EXERCICE 1 4 points
Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :

- s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A,
- sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que $p(\mathrm{R}) = 0{,}15$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B
Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x - 2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) \geq 0$?

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques
Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.
Partie A
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$.

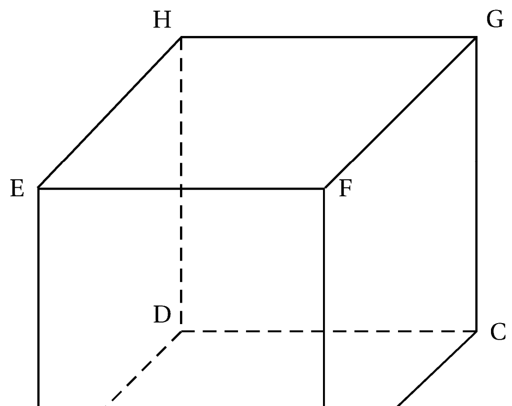
Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe : $(1 - \sqrt{3}) + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3})$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$.

Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».
Partie B
On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, représenté ci-dessous.
Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».
Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on considère la similitude directe f d'écriture complexe : $z \to \frac{3}{2}(1 - i)z + 4 - 2i$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :

Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation : $11x - 5y = 14$.

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14 ; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal. $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

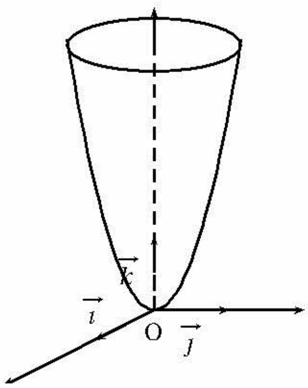
La surface Σ ci-dessous a pour équation $z = x^2 + y^2$.

Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole »

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leq a \leq b \leq 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a, b]$.



EXERCICE 3 6 points

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x + 1) + \frac{1}{2}x^2$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci- dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

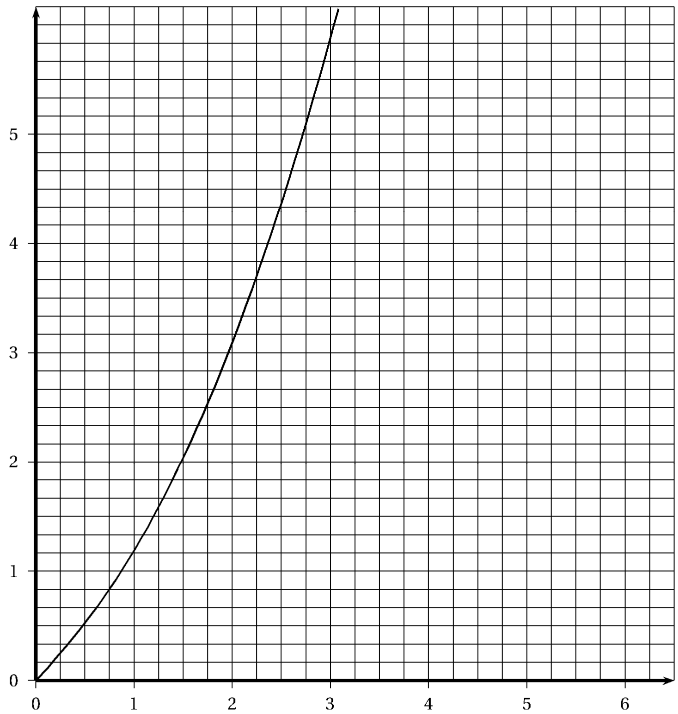
3. *a*. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur



EXERCICE 4 5 points

Partie A

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.

On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par : $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe ($\mathscr{C}$) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2. *a*. Interpréter graphiquement $g(2)$.

b. Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2{,}5$.

3. *a*. Soit x un réel supérieur à 2.

Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq x-2$. En déduire que $g(x) \geq x-2$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel t, $f(t) = (t-1)\,\mathrm{e}^{-t} + 1$.

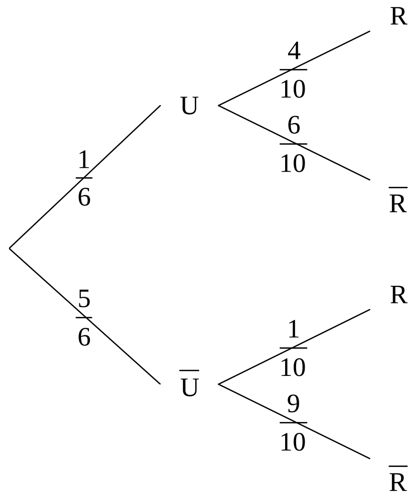
1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points



1. Soit U l'évènement « le joueur obtient le 1 ». $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{R} \cap \mathrm{U}) + p(\mathrm{R} \cap \overline{\mathrm{U}}) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est $p(\mathrm{R} / \mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{R} \cap \mathrm{A})}{p(\mathrm{R})} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{4}{9}$

Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de B est $p(\mathrm{R} / \mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{R} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{R})} = \dfrac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{9}$ donc si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est inférieure à la probabilité qu'elle provienne de B.

Partie B

1. Si le gain est $2x$ alors le joueur a obtenu 2 boules rouges donc $p(\mathrm{G} = 2x) = 0{,}15^2 = 0{,}0225$.

Si le gain est $x - 2$ alors le joueur a obtenu 1 boule rouge et une boule noire donc $p(\mathrm{G} = x - 2) = 2 \times 0{,}15 \times (1 - 0{,}15) = 0{,}255$.

Si le gain est -4 alors le joueur a obtenu 2 boules noires donc $p(\mathrm{G} = -4) = (1 - 0{,}15)^2 = 0{,}85^2 = 0{,}7225$.

k	-4	$x-2$	$2x$	Total
$p(\mathrm{G} = k)$	0,7225	0,255	0,0225	1
$k\,p(\mathrm{G} = k)$	$-2{,}89$	$0{,}255\,x - 0{,}51$	$0{,}045\,x$	$0{,}3\,x - 3{,}4$

2. $\mathrm{E}(\mathrm{G}) = 0{,}3\,x - 3{,}4$

3. $\mathrm{E}(\mathrm{G}) \geq 0 \Leftrightarrow 0{,}3\,x - 3{,}4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3{,}4}{0{,}3}$, $\frac{3{,}4}{0{,}3} \approx 11{,}33$ or x est un nombre entier donc $x \geq 12$.

Pour que le jeu soit favorable au joueur, il faut que le gain soit d'au moins 12 €.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Partie A

1. **Proposition 1 : FAUSSE**

$\arg z^{100} = 100 \arg z$ à 2π près donc $\arg z^{100} = \frac{100}{3}\pi$ à 2π près or $100 = 6 \times 16 + 4$ donc

$\arg z^{100} = 32\pi + \frac{4}{3}\pi$ à 2π près donc z^{100} n'est pas un nombre réel.

2. **Proposition 2 : FAUSSE**

$\left| \dfrac{z}{1-z} \right| = 1 \Leftrightarrow |z| = |1 - z| \Leftrightarrow \mathrm{OM} = \mathrm{AM}$ où A est le point d'affixe 1 donc M décrit la médiatrice de [OA], l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des imaginaires.

3. **Proposition 3 : VRAIE**

r a pour écriture complexe $z' - z_{\mathrm{K}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} (z - z_{\mathrm{K}})$ soit $z' = -i(z - z_{\mathrm{K}}) + z_{\mathrm{K}}$

l'image du point O par la rotation r a pour affixe $i\,z_{\mathrm{K}} + z_{\mathrm{K}} = i(1 + i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$ soit $(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$.

4. **Proposition 4 : VRAIE**

$z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) z + 1 = 0$ donc $\Delta = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4 = -4\left[1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right] = -4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$. donc $z_1 = \frac{1}{2}\left[-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$z_1 = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc l'équation (E) *a* deux solutions complexes de modules égaux à 1.

Partie B
Proposition 5 : VRAIE

Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1) ; $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées (0 ; 1 ; – 1) donc $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BD} = -1 + 1 = 0$, de même $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{DE} = 1 - 1 = 0$ donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE).

Proposition 6 : FAUSSE

$\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées (1 ; 0 ; – 1) et $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées (0 ; 1 ; – 1) donc $\overrightarrow{EB} . \overrightarrow{DE} = 1 \neq 0$ donc les droites (EB) et (ED) ne sont pas perpendiculaires.

On aurait pu aussi montrer que le triangle EBD est équilatéral de côté $\sqrt{2}$ donc les droites (EB) et (ED) ne sont pas perpendiculaires.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

1. VRAIE

L'expression complexe de f est $z' = \dfrac{3}{2}(1 - \mathrm{i})\, z + 4 - 2\,\mathrm{i}$ de la forme $z' = a\,z + b$ donc f est un similitude directe donc est décomposable en le produit d'une homothétie de rapport positif $\left|\dfrac{3}{2}(1-\mathrm{i})\right|$ et une rotation de même centre Ω d'angle $\arg\left(\dfrac{3}{2}(1-\mathrm{i})\right)$.

$\left|\dfrac{3}{2}(1-\mathrm{i})\right| = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc le rapport de l'homothétie est $3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg\left(\dfrac{3}{2}(1-\mathrm{i})\right) = -\dfrac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ donc l'angle de la rotation est $-\dfrac{\pi}{4}$

Le centre de l'homothétie et de la rotation Ω est l'unique point invariant de f

Vérification : si $z = -2 - 2\,\mathrm{i}$ alors $\dfrac{3}{2}(1 - \mathrm{i})\, z + 4 - 2\,\mathrm{i} = 3\,(1 - \mathrm{i})\,(-1 - \mathrm{i}) + 4 - 2\,\mathrm{i} = -6 + 4 - 2\,\mathrm{i}$

donc si $z = -2 - 2\,\mathrm{i}$, alors $\dfrac{3}{2}(1 - \mathrm{i})\, z + 4 - 2\,\mathrm{i} = -2 - \mathrm{i} = z$

donc le point d'affixe (– 2 –2 i) est invariant par f donc Ω (– 2 – 2 i) est le centre de l'homothétie et de la rotation

2. Proposition 2 : FAUSSE

si $n = 1$, Soit $a = 5^7 + 2^4 = 78\,141$. Ce nombre ne termine ni par 0 ni par 5 donc n'est pas divisible par 5.

Proposition 3 : VRAIE

$2^3 \equiv 1\ [7]$ donc $2^{3n+1} \equiv 2\ [7]$

$5 \equiv -2\ [7]$ donc $5^2 \equiv 4\ [7]$ donc $5^6 \equiv 2^6\ [7]$ soit $5^6 \equiv 1\ [7]$ donc $5^{6n+1} \equiv 5\ [7]$ donc $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0\ [7]$

Pour tout entier n non nul, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

3. VRAIE

$11 \times 14 - 5 \times 28 = 14$

$11\,x - 5\,y = 14$ et $11 \times 14 - 5 \times 28 = 14$ donc par soustraction membre à membre : $11\,(x - 14) - 5\,(y - 28) = 0$

$11\,(x - 14) = 5\,(y - 28)$ donc 11 divise $5\,(y - 28)$ or 11 et 5 sont premiers entre eux donc 11 divise $y - 28$

Il existe un entier relatif k tel que $y - 28 = 11\,k$

donc en remplaçant dans $11\,(x - 14) = 5\,(y - 28)$, on obtient que $x - 14 = 5\,k$

donc $x = 5\,k + 14$ et $y = 11\,k + 28$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Vérification : si $x = 5\,k + 14$ et $y = 11\,k + 28$ alors $11\,x - 5\,y = 55\,k + 11 \times 14 - 55\,k - 28 \times 5 = 14$

donc l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(5\,k + 14 ; 11\,k + 28)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

4. Proposition 5 : FAUSSE

Si $x = \lambda$, $z = y^2 + \lambda^2$ est l'équation d'une parabole

Proposition 6 : VRAIE

L'intersection du solide par le plan d'équation $z = k$ est un cercle de centre $\Omega_k\,(0 ; 0 ; k)$ de rayon $\sqrt{k}$ donc d'aire $\pi\, k$

$\mathrm{V} = \displaystyle\int_0^k S(k)\,\mathrm{d}\,k = \int_0^k \pi\,k\,\mathrm{d}\,k = \frac{1}{2}\pi\,k^2$ donc si $k = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$, alors $\mathrm{V} = \dfrac{81}{4}\pi$, si $k = 9$, $\mathrm{V} = \dfrac{1}{2}\pi \times 9^2 = \dfrac{81}{2}\pi$

Le volume compris entre le plan d'équation $z = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ et le plan d'équation $z = 9$, est égal à $\dfrac{81}{2}\pi - \dfrac{81}{4}\pi = \dfrac{81}{4}\pi$

EXERCICE 3 6 points
Partie A. Démonstration de cours
1. Démonstration de cours.

Soit A un réel quelconque, (u_n) n'est pas majorée donc il existe n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geq$ A,

(u_n) est croissante, donc si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq u_{n_0}$ or $u_{n_0} \geq$ A donc $u_n \geq$ A

donc si (u_n) est croissante, non majorée, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq$ A.

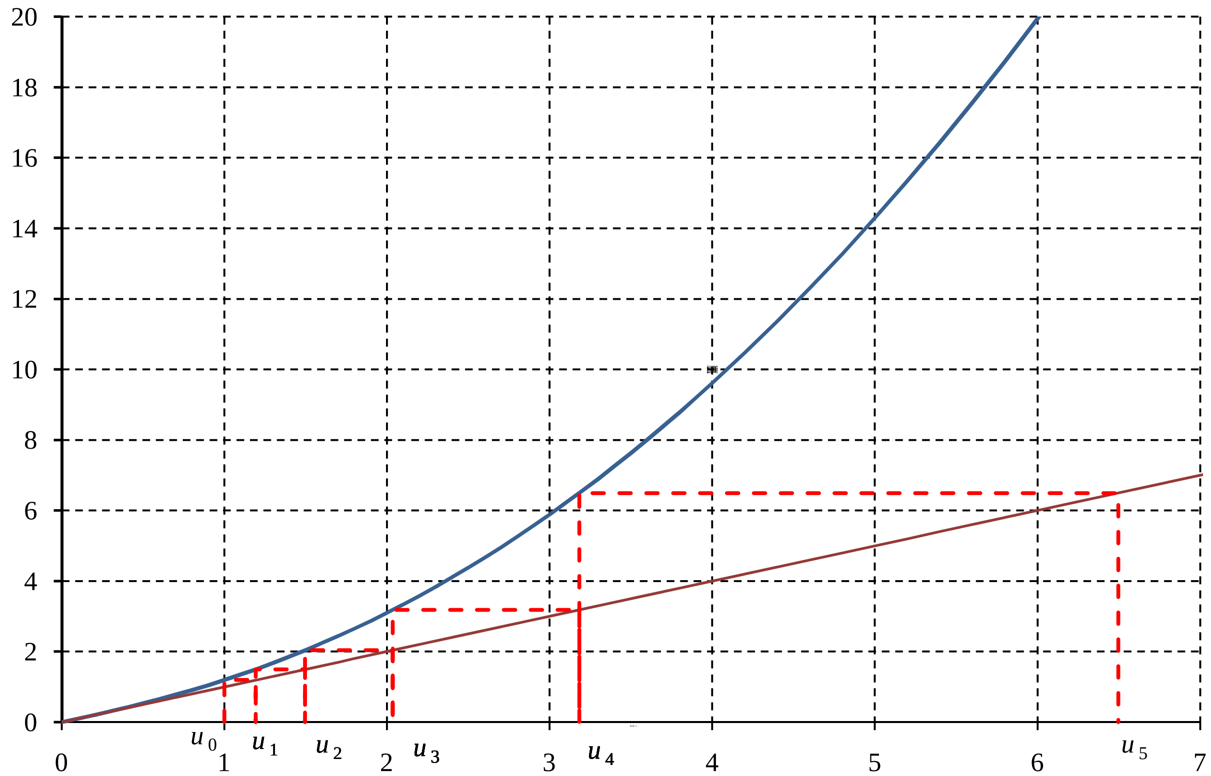
Partie B

1. f est définie dérivable (somme de fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [ )

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} + x$ donc sur l'intervalle [0 ; + ∞ [$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.

2. $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$ donc une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est $y = x$

Partie C



2. (u_n) semble être croissante et non bornée.

3. *a*. $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 1$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons que, pour tout entier naturel n, si $u_n \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq 1$

f est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [donc si $u_n \geq 1$ alors $f(u_n) \geq f(1)$ alors $u_{n+1} \geq \ln 2 + \dfrac{1}{2}$ or $\ln 2 + \dfrac{1}{2} \geq 1$ donc $_{n+1} \geq 1$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. $u_0 = 1$, $u_1 = \ln 2 + \dfrac{1}{2}$ donc $u_1 \geq u_0$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons que, pour tout entier naturel n, si $u_{n+1} \geq u_n$ alors $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
f est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [donc si $u_{n+1} \geq u_n$ alors $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, la suite (u_n) est croissante.

c. Si la suite (u_n) est majorée, (u_n) étant croissante, alors (u_n) est convergente et sa limite est solution de $f(x) = x$ et est supérieure ou égale à 1.

Soit $g(x) = \ln(x+1) + \dfrac{1}{2}x^2 - x$ alors $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} + x - 1 = \dfrac{x^2}{x+1}$ donc g est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [

$g(0) = 0$ donc si $x > 0$ alors $g(x) > 0$ donc g ne s'annule pas sur] 0 ; + ∞ [donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur] 0 ; + ∞ [.
(u_n) n'est pas majorée.

d. La suite (u_n) est croissante non majorée donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.