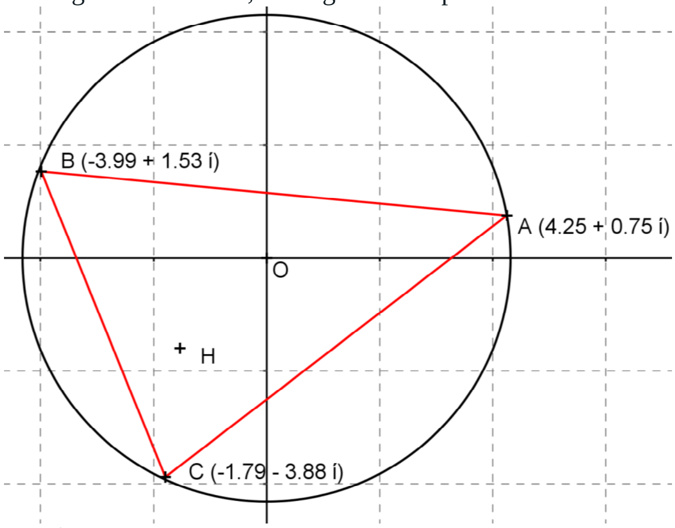
Soient A, B et C trois points non alignés, on note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par *a*, *b* et *c* les affixes respectives des points A, B et C.

1. Montrer que l'on peut écrire : $a = r\,e^{i\theta_A}$, $b = r\,e^{i\theta_B}$, $c = r\,e^{i\theta_C}$, où r est un réel strictement positif et θ_A, θ_B et θ_C sont des réels.
2. On a alors construit, à partir du logiciel GeoGebra, une figure correspondant aux données de l'exercice :

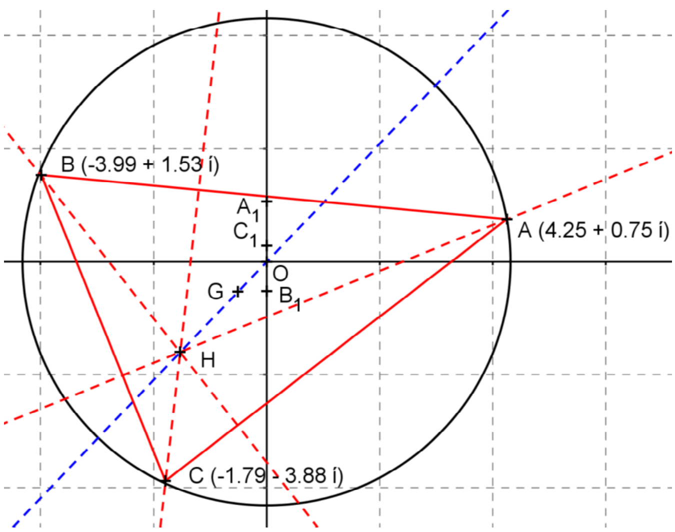


a. Reproduire, sur ce logiciel, une figure semblable à celle ci-dessus.
b. Construire le point H d'affixe *h* définie par $h = a + b + c$
c. Placer les points d'affixes : $\dfrac{h-a}{b-c}$; $\dfrac{h-b}{a-c}$ et $\dfrac{h-c}{a-b}$. Que remarque-t-on lorsque l'on déplace les points A ou B ou C?
d. Quelle conjecture est-il alors légitime de faire sur les droites (AH), (BH) et (CH).
e. Placer le point G d'affixe $g = \dfrac{h}{3}$.
f. En déduire une conjecture sur les points O, G et H.
3. Montrer que les nombres complexes $\dfrac{z-a}{b-c}$; $\dfrac{z-b}{a-c}$ et $\dfrac{z-c}{a-b}$ sont imaginaires purs. En déduire la nature du point H
4. Montrer que les points O, G et H sont alignés et indiquer la position relative de ces trois points.

CORRECTION

1. O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc OA = OB = OC
Soit *r* = OA, *r* > 0 (les points A, B et C sont non alignés).
Soit $\theta_A = (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$, la forme trigonométrique de *a*, affixe de A, est alors $a = r\,e^{i\theta_A}$
r = OB, soit $\theta_B = (\vec{u}, \overrightarrow{OB})$, la forme trigonométrique de *b*, affixe de B, est alors $b = r\,e^{i\theta_B}$
r = OC, soit $\theta_C = (\vec{u}, \overrightarrow{OC})$, la forme trigonométrique de *c*, affixe de C, est alors $c = r\,e^{i\theta_C}$

2. *a.*



c. Lorsque l'on déplace les points A ou B ou C, les points $A_1\left(\dfrac{h-a}{b-c}\right)$, $B_1\left(\dfrac{h-b}{a-c}\right)$ et $C_1\left(\dfrac{h-c}{a-b}\right)$ se déplacent sur l'axe des imaginaires.

d. Si A_1 appartient à l'axe des imaginaires, alors $\dfrac{h-a}{b-c}$ est un imaginaire pur donc $\arg\left(\dfrac{h-a}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près donc

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près donc les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires.
(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.
De même on peut supposer que (BH) est la hauteur issue de B du triangle ABC et que (CH) est la hauteur issue de C du triangle ABC.

f. Apparemment les points O, G et H sont alignés.

3. $h = a + b + c = r\,e^{i\theta_A} + r\,e^{i\theta_B} + r\,e^{i\theta_C}$

donc $h - a = r\,(e^{i\theta_B} + r\,e^{i\theta_C})$

$$\frac{h-a}{b-c} = \frac{r\,(e^{i\theta_B} + e^{i\theta_C})}{r\,(e^{i\theta_B} - e^{i\theta_C})} = \frac{e^{i\theta_B} + e^{i\theta_C}}{e^{i\theta_B} - e^{i\theta_C}} = \frac{e^{\frac{i(\theta_B+\theta_C)}{2}}\left(e^{\frac{i(\theta_B-\theta_C)}{2}} + e^{\frac{i(-\theta_B+\theta_C)}{2}}\right)}{e^{\frac{i(\theta_B+\theta_C)}{2}}\left(e^{\frac{i(\theta_B-\theta_C)}{2}} - e^{\frac{i(-\theta_B+\theta_C)}{2}}\right)}$$

$$\frac{h-a}{b-c} = \frac{e^{\frac{i(\theta_B-\theta_C)}{2}} + e^{\frac{-i(\theta_B-\theta_C)}{2}}}{e^{\frac{i(\theta_B-\theta_C)}{2}} - e^{\frac{-i(\theta_B-\theta_C)}{2}}} = \frac{2\cos\frac{\theta_B-\theta_C}{2}}{2\,i\sin\frac{\theta_B-\theta_C}{2}}$$

$\dfrac{h-a}{b-c} = -i\,\dfrac{\cos\frac{\theta_B-\theta_C}{2}}{\sin\frac{\theta_B-\theta_C}{2}}$ donc $\dfrac{h-a}{b-c}$ est un imaginaire pur

de même $\dfrac{h-b}{a-c} = -i\,\dfrac{\cos\frac{\theta_A-\theta_C}{2}}{\sin\frac{\theta_A-\theta_C}{2}}$ et $\dfrac{h-c}{a-b} = -i\,\dfrac{\cos\frac{\theta_A-\theta_B}{2}}{\sin\frac{\theta_A-\theta_B}{2}}$

Les nombres complexes $\dfrac{h-a}{b-c}$; $\dfrac{h-b}{a-c}$ et $\dfrac{h-c}{a-b}$ sont imaginaires purs.

$\dfrac{h-a}{b-c}$ est un imaginaire pur donc $\arg\left(\dfrac{h-a}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près donc $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près donc les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires.
(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.
De même (BH) est la hauteur issue de B du triangle ABC donc le point H, intersection de (AH) et (BH), est l'orthocentre du triangle ABC.

4. $g = \dfrac{a+b+c}{3}$ donc le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

$g = \dfrac{h}{3}$ donc $h = 3\,g$ donc $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$, les points O, G et H sont alignés et G est au tiers à partir de O sur le segment [OH].
Dans un triangle ABC, le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H de ce triangle sont alignés et $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$.