Soit le nombre complexe $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. On pose $z_2 = \overline{z_1}$; $z_3 = -z_1$ et $z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3.

3. *a.* Montrer que $z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$.

b. En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4.

c. Quelle est la forme algébrique de z_4 ?

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.

a. Placer les points A, B, C et D.

b. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle.

c. Calculer les distances AC et BD.

d. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

CORRECTION

1. $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ donc $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$.

$z_2 = \overline{z_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$; $z_3 = -z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$

2. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ donc $|z_1| = 3$ et $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$ à 2π près

Règle utilisée : $|\overline{z}| = |z|$ et pour tout z non nul, $\arg\overline{z} = -\arg z$

$|z_2| = |z_1| = 3$ et $\arg z_2 = -\arg z_1$ donc $\arg z_2 = -\frac{\pi}{6}$ à 2π près

Règle utilisée : $|z z'| = |z|\,|z'|$ et pour tout z non nul et tout z' non nul, $\arg(z z') = \arg z + \arg z'$

$|z_3| = |-z_1| = |-1| \times |z_1| = 1 \times 3 = 3$

$\arg z_3 = \arg(-1) + \arg(z_1)$ donc $\arg z_3 = \pi + \frac{\pi}{6}$ à 2π près donc $\arg z_3 = \frac{7\pi}{6}$ à 2π près

3. *a.* $|z_1| = 3$ et $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$ à 2π près donc $z_1 = 3e^{\frac{i\pi}{6}}$.

$z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}} = 3e^{\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{2i\pi}{3}} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)}$ donc $z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$.

b. **Règle utilisée :** $e^{i\theta}$ est un complexe de module 1 dont un argument est θ.

$e^{\frac{5i\pi}{6}}$ est un complexe de module 1 dont un argument est $\frac{5\pi}{6}$. $z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$ donc $|z_4| = 3$ et $\arg z_4 = \frac{5\pi}{6}$ à 2π près.

c. $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ donc $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

La forme algébrique de z_4 est $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

4. *a.* $|z_1| = |z_4| = 3$ donc OA = OD = 3. Pour tracer les points A et D, il suffit de tracer le cercle de centre O de rayon 3, l'ordonnée de A et celle de D est $\frac{3}{2}$, A est le seul point de ce cercle d'abscisse positive, D est le second point d'abscisse négative.

L'affixe de B est le conjugué de celle de A donc A et B sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

L'affixe de C est l'opposé de celle de A donc A et C sont symétriques par rapport à O.

b. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 3$ donc OA = OB = OC = OD = 3 donc les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre O et de rayon 3.

c. A et C sont symétriques par rapport à O donc [AC] est un diamètre du cercle AC = 6

$z_3 - z_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{3} - 3i$ donc $BD^2 = |z_3 - z_4|^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 36$ donc BD = 6

d. **<u>Règle utilisée :</u>** Le milieu du segment [AB] a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$

$z_3 + z_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right) = 0$ donc le milieu de [BD] est O.

Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui ont le même milieu O donc c'est un parallélogramme, ces diagonales ont la même longueur donc le quadrilatère ABCD est un rectangle.