On considère la suite numérique $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.

**Partie A**

**1.** On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel $n$ donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang $n$. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

| Algorithme No 1 | Algorithme No 2 | Algorithme No 3 |
|---|---|---|
| **Variables :**<br>$v$ est un réel<br>$i$ et $n$ sont des entiers naturels<br>**Début de l'algorithme :**<br>Lire $n$<br>$v$ prend la valeur 1<br>Pour $i$ variant de 1 à $n$ faire<br>    $v$ prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$<br>Fin pour<br>Afficher $v$<br>**Fin algorithme** | **Variables :**<br>$v$ est un réel<br>$i$ et $n$ sont des entiers naturels<br>**Début de l'algorithme :**<br>Lire $n$<br>Pour $i$ variant de 1 à $n$ faire<br>    $v$ prend la valeur 1<br>    Afficher $v$<br>    $v$ prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$<br>Fin pour<br>**Fin algorithme** | **Variables :**<br>$v$ est un réel<br>$i$ et $n$ sont des entiers naturels<br>**Début de l'algorithme :**<br>Lire $n$<br>$v$ prend la valeur 1<br>Pour $i$ variant de 1 à $n$ faire<br>    Afficher $v$<br>    $v$ prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$<br>Fin pour<br>    Afficher $v$<br>**Fin algorithme** |

**2.** Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,800 | 2,143 | 2,333 | 2,455 | 2,538 | 2,600 | 2,647 | 2,684 | 2,714 |

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,967 | 2,968 | 2,968 | 2,968 | 2,969 | 2,969 | 2,969 | 2,970 | 2,970 | 2,970 |

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite $(v_n)$ ?

**3. *a.*** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 < v_n < 3$.

***b.*** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite $(v_n)$ est-elle monotone ?

***c.*** Démontrer que la suite $(v_n)$ est convergente.

**Partie B Recherche de la limite de la suite $(v_n)$**

On considère la suite $(w_n)$ définie pour tout $n$ entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

**1.** Démontrer que $(w_n)$ est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

**2.** En déduire l'expression de $(w_n)$, puis celle de $(v_n)$ en fonction de $n$.

**3.** Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

## CORRECTION

**Partie A**

**1.** L'algorithme 1 ne convient pas : il affiche seulement la dernière valeur obtenue donc $v_n$

L'algorithme 2 ne convient pas : il affiche toujours 1

L'algorithme 3 convient : il affiche $v_0$, $v_1$ … $v_{n-1}$ puis à la fin de la boucle, il affiche $v_n$.

**2.** La suite $v_n$ semble être croissante et converger vers 2,97

**3. *a.*** Initialisation : $v_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 3$

Hérédité : Montrons que pour tout $n$ de N, si $0 < v_n < 3$ alors $0 < v_{n+1} < 3$

$0 < v_n < 3$ donc $3 < 6 - v_n < 6$ donc $\dfrac{9}{6} < \dfrac{9}{6 - v_n} < \dfrac{9}{3}$ soit $0 < v_{n+1} < 3$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel $n$, $0 < v_n < 3$.

***b.*** $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6 - v_n} - v_n = \dfrac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$

Pour tout $n$ de N, $0 < v_n < 3$ donc $6 - v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$

La suite $(v_n)$ est strictement croissante.

***c.*** La suite $(v_n)$ est strictement croissante, majorée par 3 donc est convergente.

**Partie B Recherche de la limite de la suite $(v_n)$**

**1.** $w_{n+1} = \dfrac{1}{v_{n+1} - 3}$ or $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$ donc $v_{n+1} - 3 = \dfrac{3v_n - 9}{6 - v_n}$ donc $w_{n+1} = \dfrac{6 - v_n}{3(v_n - 3)}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{1}{v_n - 3}$$

$w_{n+1} - w_n = \dfrac{6 - v_n - 3}{3(v_n - 3)} = -\dfrac{1}{3}$ donc $(w_n)$ est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

**2.** $(w_n)$ est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$ de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{v_0 - 3} = -\dfrac{1}{2}$ donc $w_n = w_0 + n\,r = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n$

$$w_n = -\frac{3 + 2n}{6}$$

$v_n - 3 = \dfrac{1}{w_n} = -\dfrac{6}{3 + 2n}$ donc $v_n = 3 - \dfrac{6}{3 + 2n}$

**3.** $v_n = 3 - \dfrac{6}{3 + 2n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$