

Corrigé

Exercice 1.

1. Déterminer une primitive des fonctions sur l'intervalle I considéré dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$; $I =]0 ; +\infty [$

b. $g(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}$; $I = \mathbb{R}$

Méthode : Quand vous recherchez une primitive d'une fonction f donnée, posez vous ces questions :

1) f est -elle une fonction usuelle (fonction constante ? fonction affine ? fonction carrée ? fonction cubique ? fonction puissance ? , fonction inverse ? fonction polynômiale ? fonction exponentielle ? ...)

☞ Si la réponse est affirmative, vous pouvez directement donner une primitive en gardant à l'esprit qu'une primitive d'une somme de fonctions ($f + g$) est la somme des primitives ($F + G$ où F et G désignent respectivement une primitive de f et g sur l'intervalle considéré), et qu'une primitive du produit d'une fonction par un réel k ($k \times f$) est égale au produit du réel k par une primitive F de f sur l'intervalle considéré.

2) Sinon f apparaît -elle sous une forme usuelle (comme $u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$ distinct de -1 , $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'e^u$) ?

Dans l'affirmative, penser à définir u puis à définir u' ...

3) Dans le cas contraire, suivre les indications fournies dans l'énoncé, (on vous invite à étudier une certaine fonction h dont la dérivée est f (ou à défaut dépend de f) etc....)

Ici $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x} - x^{-3}$

f apparaît comme une différence de 2 fonctions usuelles (fonction inverse et fonction puissance)

Fonction φ	Fonction ψ (primitive de φ)
$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\psi : x \mapsto \ln(x)$
$\varphi : x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$)	$\psi : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ainsi une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto \ln(x)$

Et une primitive de $x \mapsto x^{-3}$ sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$ c'est-à-dire $x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-2}$ ou encore $x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$

Conclusion : Une primitive de f sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto \ln(x) - \left(-\frac{1}{2x^2}\right)$ c'est-à-dire $x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{2x^2}$

2. On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$.

Déterminer la primitive de h sur \mathbb{R} qui s'annule en -1 .

Ici h n'est pas une fonction " usuelle ". On " passe " à la question 2 :

Si on pose $u(x) = x^4 + 1$, alors pour tout réel x , $u'(x) = 4x^3$.

Dans ces conditions, pour tout réel x , $h(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4x^3}{x^4 + 1} = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

On en conclut qu'une primitive de h sur \mathbb{R} est la fonction

$x \mapsto \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1)$

h est de la forme $k \times \frac{u'}{u}$ donc une primitive de h est de la forme $k \ln u$

Comme les primitives de h sur \mathbb{R} diffèrent d'une constante, on en déduit que la primitive H de h sur \mathbb{R} qui s'annule en -1 est définie sur \mathbb{R} par $H(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \alpha$ où α est un réel à déterminer.

Comme $H(-1) = 0$ alors $\frac{1}{4} \ln(2) + \alpha = 0$ donc $\alpha = -\frac{1}{4} \ln(2)$

Conclusion : $H(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) - \frac{1}{4} \ln(2)$

3. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} dt$

Considérons la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}}$.

Question 1 : « ce n'est pas une fonction usuelle ».

Question 2 : Si on pose $u(t) = \sqrt{t}$, alors pour tout réel t strictement positif, $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Dans ces conditions, pour tout réel t ,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} = 2 \times u'(t) e^{u(t)}$$

C' est une fonction qui s'exprime sous la forme $k \times u' e^u$ et une primitive d'une telle fonction est de la forme $k e^u$ (k réel).

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^2 u'(t) e^{u(t)} dt = 2 [e^{u(t)}]_1^2 = 2 [e^{\sqrt{t}}]_1^2 = 2(e^{\sqrt{2}} - e)$$

4. Soit k une fonction définie sur $[-1; 1]$, telle que pour tout réel x de $[-1; 1]$, $-3 \leq k(x) \leq 2e$. Donner un encadrement de $\int_{-1}^1 k(x) dx$

Le but est d'encadrer l'intégrale de la fonction $x \mapsto k(x)$ sur $[-1; 1]$.

Méthode : Pour l'encadrer, on cherche à encadrer k sur $[-1; 1]$.

Or ici il n'y a rien à faire, on vous le donne déjà : pour tout réel x de $[-1; 1]$, $-3 \leq k(x) \leq 2e$.

Par croissance de l'intégrale, il en résulte que :

$$\int_{-1}^1 -3 dx \leq \int_{-1}^1 k(x) dx \leq \int_{-1}^1 2e dx$$

☞ Rappel : L'intégrale d'une fonction constante sur l'intervalle $[a; b]$ est égale au produit de la constante par la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de l'intégrale c'est-à-dire que si M désigne un réel,

$$\text{alors } \int_a^b M dx = M \int_a^b 1 dx = M [x]_a^b = M(b-a)$$

Ainsi : $\int_{-1}^1 -3 dx = -3(1 - (-1)) = -6$ et $\int_{-1}^1 2e dx = 2e(1 - (-1)) = 4e$

Conclusion : $-6 \leq \int_{-1}^1 k(x) dx \leq 4e$

Exercice 2.

La courbe C ci-dessous représente une fonction h dans un repère orthonormé et A est l'aire exprimée en unités d'aire du domaine coloré.

1. α désigne l'abscisse, avec $2 < \alpha < 3$, du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses. A est égale à :

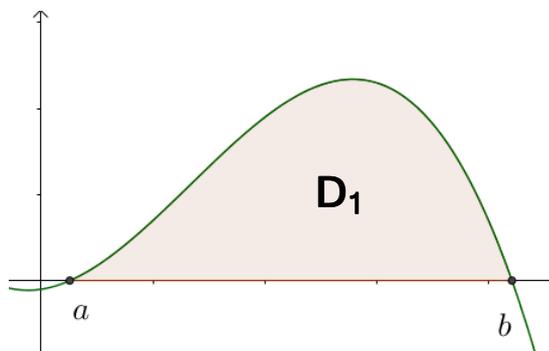
a) $\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^4 h(x)dx$

b) $\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx - \int_{\alpha}^4 h(x)dx$

c) $-\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^4 h(x)dx$

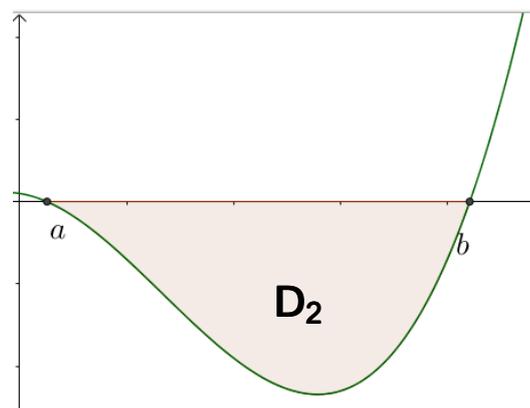
Bonne réponse : réponse c

☞ Rappel : Lorsqu'une fonction f est continue et positive sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire du domaine D_1 délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ c'est-à-dire que : $\int_a^b f(x)dx = A(D_1)$



Par contre, si f est continue et négative sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'opposé de l'aire du domaine D_2 c'est-à-dire

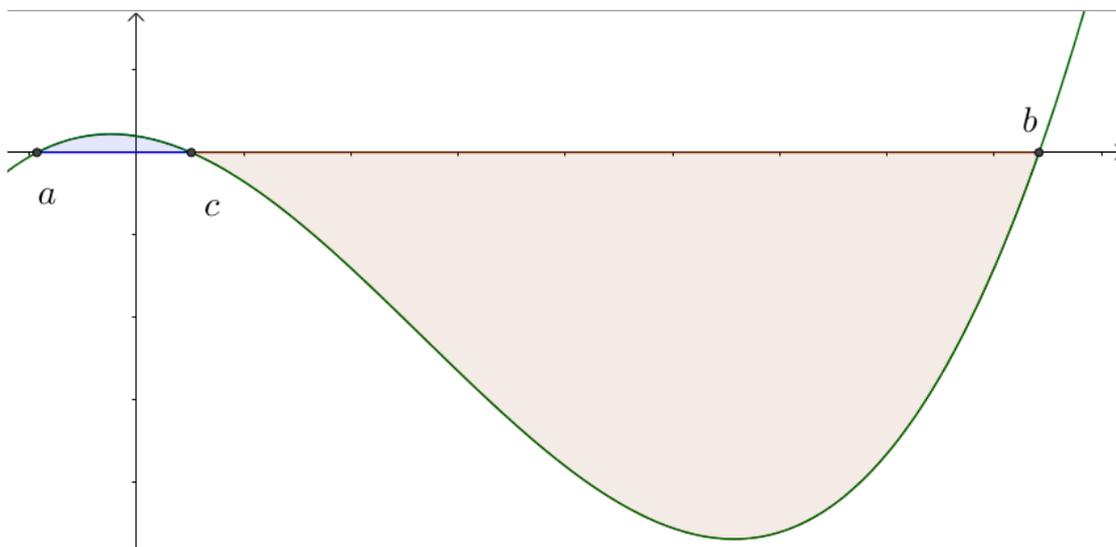
que $\int_a^b f(x)dx = -A(D_2)$ ou encore $A(D_2) = -\int_a^b f(x)dx$

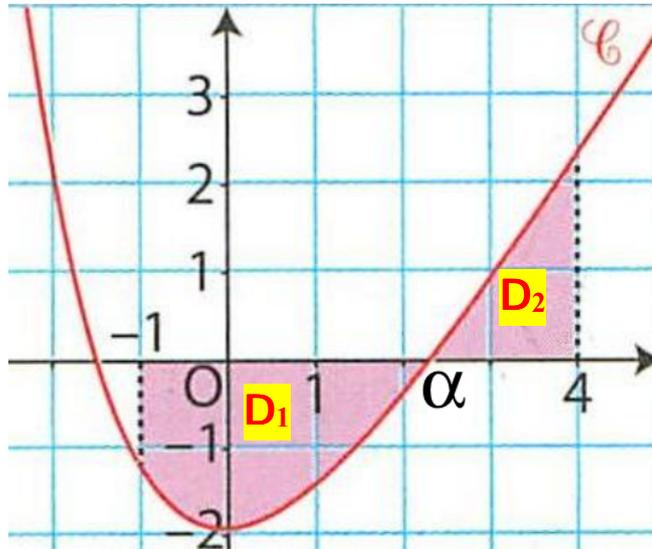


Enfin l'aire en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe C ,

l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est la somme des aires des deux domaines D_3 et D_4

C'est-à-dire $A(D_3) + A(D_4)$ avec $A(D_3) = -\int_a^c f(x)dx$ et $A(D_4) = \int_c^b f(x)dx$





Ici l'aire du domaine est égale à $-\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^4 f(x)dx$

2. $\int_{-1}^4 h(x)dx$ est comprise entre :

a) -5 et -3

b) -3 et -1

c) 1 et 3 .

Méthode : La seule dont on dispose est de " compter en unité d'aire "

D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^4 h(x)dx = \int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^4 h(x)dx$$

Or $\int_{-1}^{\alpha} h(x)dx = -A(D_1) \approx -4,4$ et $\int_{\alpha}^4 h(x)dx = A(D_2) \approx 2,2$

Il en résulte que $\int_{-1}^4 h(x)dx = \int_{-1}^{\alpha} h(x)dx + \int_{\alpha}^4 h(x)dx \approx -4,4 + 2,2 \approx -2,2$

On en déduit alors que $\int_{-1}^4 h(x)dx$ est une valeur comprise entre -3 et -1 .

3. Sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$, la fonction $x \mapsto \int_0^x h(t)dt$:

a) est croissante

b) est décroissante

c) change de variation

Notons $\varphi : x \mapsto \int_0^x h(t)dt$

φ représente la primitive de h sur $[0 ; \alpha]$ qui s'annule en 0 . Cela signifie que la dérivée de φ sur $[0 ; \alpha]$ est h et $\varphi(0)=0$

Pour déterminer le sens de variation de φ sur $[0 ; \alpha]$, on cherche le signe de sa dérivée. Or sa dérivée est h et graphiquement, $h(x) \leq 0$ pour $x \in [0 ; \alpha]$. Il en résulte donc que pour tout x de $[0 ; \alpha]$, $\varphi'(x) \leq 0$ et par suite φ est décroissante sur $[0 ; \alpha]$.

4. Sur l'intervalle $[\alpha ; 4]$, la fonction $x \mapsto \int_x^\alpha h(t)dt$ est:

a) positive

b) **négative**

c) de signe quelconque.

Notons $\psi : x \mapsto \int_x^\alpha h(t)dt$

ψ représente la primitive de h sur $[\alpha ; 4]$ qui s'annule en α .

Cela signifie que la dérivée de ψ sur $[\alpha ; 4]$ est h et $\psi(\alpha) = 0$.

On souhaite déterminer le signe de ψ sur $[\alpha ; 4]$.

On remarque que dans l'intégrale $\int_x^\alpha h(t)dt$, les bornes ne sont pas rangées dans l'ordre croissant

(x appartenant à l'intervalle $[\alpha ; 4]$, cela sous-entend que $x \geq \alpha$).

Aussi pour interpréter correctement, on va " ranger les bornes " dans l'ordre croissant.

Pour tout x de $[\alpha ; 4]$, $\psi(x) = \int_x^\alpha h(t)dt = - \int_\alpha^x h(t)dt$

Soit $x \in]\alpha ; 4]$

Graphiquement pour $t \in [\alpha ; x]$, on remarque que $h(t) \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_\alpha^x h(t)dt \geq 0 \text{ et donc } - \int_\alpha^x h(t)dt \leq 0 \text{ c'est-à-dire } \psi(x) \leq 0$$

Enfin pour $x = \alpha$, on a : $\psi(x) = \psi(\alpha) = 0$

Finalement, pour tout x de $[\alpha ; 4]$, $\psi(x) \leq 0$

Ainsi, ψ est négative sur $[\alpha ; 4]$