83 **1. a)** $x^3 - 15x - 4 = x\left(x^2 - 15 - \dfrac{4}{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 15 - \dfrac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 15 = \dfrac{4}{x}$ car $x = 0$ n'est pas solution.

c) 3 solutions

$x_0 = 4\,; -4 < \alpha < -3\,; -1 < \beta < 0.$

d) $x^3 - 15x - 4 > 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 15 - \dfrac{4}{x}\right) > 0$ et $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 15 - \frac{4}{x} > 0 \text{ si } x > 0$$

ou

$x^2 - 15 - \dfrac{4}{x} < 0$ si $x < 0$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 15 > \dfrac{4}{x} \text{ sur }]0\,;+\infty[\\ x^2 - 15 < \dfrac{4}{x} \text{ sur }]-\infty\,;0[\end{cases}$$

e) Sur $]0\,;+\infty[$, la parabole est au-dessus de l'hyperbole si $x > 4$

Sur $]-\infty\,;0[$, la parabole est en dessous de l'hyperbole si $x \in\,]\alpha\,;\beta[$

d'où (I) a pour solution $]\alpha\,;\beta[\, \cup\,]4\,;+\infty[$.

2. a) $f'(x) = 3x^2 - 15 = 3(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

d'où le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$10\sqrt{5} - 4$	$\searrow 0 \searrow$	$-10\sqrt{5} - 4$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

b) $\left.\begin{array}{l} f(-\sqrt{5}) = 10\sqrt{5} - 4 > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\} 0 \in \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,; f(-\sqrt{5})\right[$ et

f est continue sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{5}\right[$ donc le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une solution à (E) dans $\left]-\infty\,;-\sqrt{5}\right[$.

On a de même une solution dans $\left]-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\right[$ et une solution dans $\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[$.

c) $x_0 = 4\,;\ \alpha \approx -3{,}732\,;\ \beta \approx -0{,}268.$

d) f croît sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{5}\right[$ et $f(\alpha) = 0$ donc si $x \leqslant \alpha$, $f(x) < 0$ et si $x > -\sqrt{5}$, $f(x) > 0$; de même sur $\left[-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\right]$ et $\left[\sqrt{5}\,;+\infty\right[$. On obtient finalement :

x	$-\infty$		α		β		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \,]\alpha\,;\beta[\, \cup\,]4\,;+\infty[$.

3. a) $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$

b) $x = 4$ ou $x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Delta = 12 \quad \alpha = -2 - \sqrt{3} \quad \beta = -2 + \sqrt{3}$

$S = \{4\,;\alpha\,;\beta\}$

c)

x	$-\infty$		α		β		4		$+\infty$
$x - 4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x^3 - 15x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \,]\alpha\,;\beta[\, \cup]4\,;+\infty[$.

108 **Partie A**

1. $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $\Delta = 29. \quad \alpha = \dfrac{5 + \sqrt{25}}{2}$

3. a) Si $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, comme f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$, soit $1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$ donc $f(x) \in [0\,;\alpha]$.

b) De même, si $x \geqslant \alpha$, $f(x) \geqslant f(\alpha)$ donc $f(x) \in [\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

1. c) (u_n) semble croissante.

(u_n) semble converger vers α.

2. • $u_0 = 0$, $u_1 = f(u_0) = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$, la propriété est vraie au rang 0.

• On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

• D'après la **partie A**, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ donc :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$

• La propriété se transmet, elle est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. (u_n) est croissante, majorée par α, elle est donc convergente.

Sa limite L vérifie $L = f(L)$ donc $L = \alpha$ d'après **A.2**.

Partie C

Si $0 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$, (u_n) croissante, converge vers α.

Si $u_n \geqslant \alpha$, (u_n) décroissante, converge vers α.