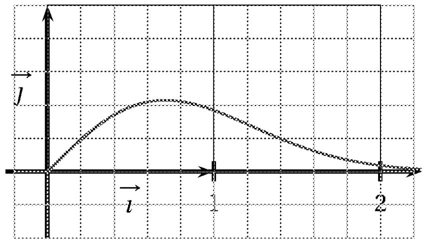
Pondichéry avril 2009

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x\ \mathrm{e}^{-x^2}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-dessous.



Partie A

1. *a*. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

b. Démontrer que f admet un maximum en et calculer ce maximum.

2. Soit α un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de α, l'aire $F(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand α tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. *a*. Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. *a*. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3 - \mathrm{i}$, $b = 1 - 3\,\mathrm{i}$ et $c = -1 - \mathrm{i}$.

1. *a*. Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b. Quelle est la nature du triangle ABC?

c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.

b. En déduire une expression de n en fonction de m.

3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.

Montrer que : $q = \dfrac{(1-\mathrm{i})}{2} m + 2 + \mathrm{i}$.

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

b. Calculer $|\,q - 2 - \mathrm{i}\,|$. Quelle est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = \text{i}$ et $z_B = 1 + 2\,\text{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que : $S(\text{O}) = \text{A}$ et $S(\text{A}) = \text{B}$.

2. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - \text{i})\,z + \text{i}$.

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = \text{O}$, $A_1 = \text{A}$ et $A_2 = \text{B}$).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \text{i})^n$.

b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$. Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$.

c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.

Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

EXERCICE 3 4 points

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) on considère les points : A de coordonnées (1, 1, 0), B de coordonnées (2, 0, 3), C de coordonnées (0, − 2, 5) et D de coordonnées (1, − 5, 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M′ tel que $\overrightarrow{\text{MM}'} = \overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} + 2\,\overrightarrow{\text{MC}}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)}, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer P(X = 2).

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que : $p(\text{A}) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x\ e^{-x^2}$

Partie A

1. *a*. Soit $X = x^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\dfrac{e^{x^2}}{x^2} = \dfrac{e^X}{X}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$ de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b. Soit $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ soit $v(x) = e^{-x^2}$ donc $v'(x) = -2x\ e^{-x^2}$

$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2\ e^{-x^2} = (1 - 2x^2)\ e^{-x^2}$

Sur $[0 ; +\infty[$, $1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc sur $[0 ; +\infty[$, $1 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où le signe de $f'(x)$:

x	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-0,5}$	$\searrow$	0

f est croissante sur $\left[0 ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$ donc f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-0,5}$

2. f est positive sur $[0 ; +\infty[$ donc $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

Soit u la fonction définie par $u(x) = -x^2$ alors $u'(x) = -2x$ donc $x\ e^{-x^2} = -\dfrac{1}{2}u'(x)\,e^{-u(x)}$

Une primitive de f est donc la fonction définie par $x \to -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$ donc $F(\alpha) = -\dfrac{1}{2}e^{-\alpha^2} - \left(-\dfrac{1}{2}e^0\right) = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-\alpha^2})$

Soit $X = -\alpha^2$, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} X = -\infty$ et $e^{-\alpha^2} = e^X$ or $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{-\alpha^2} = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} F(\alpha) = \dfrac{1}{2}$ *u.a.*

Partie B

1. *a*. f est décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$ donc si $n \ge 2$, pour tout x de $[n ; n+1]$, $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$.

La fonction f est continue sur $[0 ; +\infty[$ et $n \le n+1$ donc $\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx$

$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n+1)\int_n^{n+1} 1\,dx = f(n+1)\,(n+1-n) = f(n+1)$

$\int_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n)\int_n^{n+1} 1\,dx = f(n)\,(n+1-n) = f(n)$ donc $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n)$ soit $f(n+1) \le u_n \le f(n)$.

b. D'après l'inégalité précédente : $f(n+1) \le u_n \le f(n)$ et $f(n+2) \le u_{n+1} \le f(n+1)$ donc $u_{n+1} \le f(n+1) \le u_n$ soit $u_{n+1} \le u_n$ donc si $n \ge 2$, la suite (u_n) est décroissante.

c. Pour tout $n \ge 2$, $f(n+1) \le u_n$ or la fonction f est positive donc pour tout $n \ge 2$, $u_n \ge 0$

La suite (u_n) est décroissante minorée par 0 si $n \ge 2$ donc est convergente.

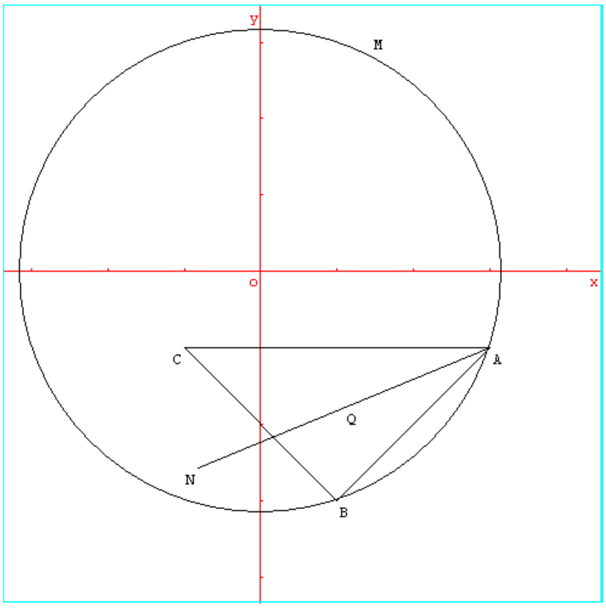
$\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$ de plus $f(n+1) \le u_n \le f(n)$ donc d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

2. *a*. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_0^{n+1} f(x)\,dx$ d'après la relation de Chasles) or $F(n) = \int_0^n f(x)\,dx$ donc $F(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. $F(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$ donc est une somme de termes positifs donc la suite $(F(n))$ est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = \dfrac{1}{2}$ d'après la question a.2. On constate d'après le tableur que si $n \ge 5$, $F(n) = 0,5$ à 10^{-10} près.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a*.



b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

$AB^2 = | a - b |^2 = | 3 - i - 1 + 3 i |^2 = | 2 + 2 i |^2 = 8$
$AC^2 = | a - c |^2 = | 3 - i + 1 + i |^2 = | 4 |^2 = 16$
$BC^2 = | b - c |^2 = | 1 - 3 i + 1 + i |^2 = | 2 - 2 i |^2 = 8$
donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc ABC est une triangle rectangle isocèle en B.

c. $OA^2 = | a |^2 = | 3 - i |^2 = 10$ et $OB^2 = | b |^2 = | 1 - 3 i |^2 = 10$ donc les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O de rayon $\sqrt{10}$.

2. *a*. r a pour écriture complexe $z' - m = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - m)$

b. N = r(A) donc $n - m = i (3 - i - m) = - i m + 1 + 3 i$ soit $n = (1 - i) m + 1 + 3 i$

3. $q = \dfrac{a+n}{2} = \dfrac{3 - i + (1 - i) m + 1 + 3 i}{2} = \dfrac{(1 - i) m + 4 + 2 i}{2} = \dfrac{(1 - i) m}{2} + 2 + i.$

4. *a*. Si M appartient au cercle de centre O de rayon $\sqrt{10}$ alors $| m | = \sqrt{10}$
donc il existe un réel θ tel que : $m = \sqrt{10} (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{10}\, e^{i \theta}$.

b. $| q - 2 - i | = \left| \dfrac{(1 - i) m}{2} \right| = \left| \dfrac{(1 - i)}{2} \right| | m | = \dfrac{\sqrt{2}}{2} | m |$

Si M décrit le cercle Γ alors $| m | = \sqrt{10}$ donc $| q - 2 - i | = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{5}$

donc Q décrit le cercle de centre Ω(2 + i) de rayon $\sqrt{5}$

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. O ≠ A et A ≠ B donc il existe une seule similitude directe S transformant O en A et A en B

2. S est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$

$S(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$ et $S(\mathrm{A}) = \mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{i} = a \times 0 + b \\ 1 + 2\,\mathrm{i} = a\,\mathrm{i} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \mathrm{i} \\ 1 + 2\,\mathrm{i} = a\,\mathrm{i} + \mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \mathrm{i} \\ a = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 - \mathrm{i}$ et $b = \mathrm{i}$

l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - \mathrm{i})\,z + \mathrm{i}$.
Le centre Ω de S est l'unique point invariant par S donc tel que $z = (1 - \mathrm{i})\,z + \mathrm{i}$ soit $-\mathrm{i}\,z + \mathrm{i} = 0$ donc $z = 1$
Le rapport de S est égal au module de a donc à $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$

L'angle de S est égal à l'argument de a donc à arg $(1 - \mathrm{i})$ donc à $-\dfrac{\pi}{4}$.

3. *a.* Les affixes z_n des points A_n vérifient $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = (1 - \mathrm{i})\,z_n + \mathrm{i}$.

$\Omega(1)$ est centre de S, donc $\begin{cases} z_{n+1} = (1-\mathrm{i})\,z_n + \mathrm{i} \\ 1 = (1-\mathrm{i})\,1 + \mathrm{i} \end{cases}$ donc par différence membre à membre $z_{n+1} - 1 = (1 - \mathrm{i})\,(z_n - 1)$

La suite $(z_n - 1)$ est donc une suite géométrique de raison $1 - \mathrm{i}$ et de premier terme $z_0 - 1 = -1$
donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n - 1 = -(1 - \mathrm{i})^n$ soit pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \mathrm{i})^n$.
On pouvait aussi effectuer une démonstration par récurrence.

b. $\overrightarrow{\Omega A_n}$ a pour affixe $z_n - 1 = -(1 - \mathrm{i})^n$.

$\overrightarrow{A_n\,A_{n+1}}$ a pour affixe $z_{n+1} - z_n = 1 - (1 - \mathrm{i})^{n+1} - (1 - (1 - \mathrm{i})^n) = (1 - \mathrm{i})^n - (1 - \mathrm{i})^{n+1} = (1 - \mathrm{i})^n\,[1 - (1 - \mathrm{i})]$

donc $\overrightarrow{A_n\,A_{n+1}}$ a pour affixe $\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i})^n$ donc $\Omega A_n = |-(1 - \mathrm{i})^n| = |(1 - \mathrm{i})^n|$ et $A_n A_{n+1} = |\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i})^n| = |\mathrm{i}|\,|(1 - \mathrm{i})^n| = |(1 - \mathrm{i})^n|$

donc $A_n A_{n+1} = \Omega A_n$

$(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n\,A_{n+1}}) = \arg \dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n - 1}$ donc $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n\,A_{n+1}}) = \arg -\mathrm{i}$ donc $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n\,A_{n+1}}) = -\dfrac{\pi}{2}$

c. $A_n A_{n+1} = \Omega A_n$ et $(\overrightarrow{A_n \Omega}, \overrightarrow{A_n\,A_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{2}$

Le triangle $\Omega\,A_n\,A_{n+1}$ est un triangle rectangle isocèle en A_n donc A_{n+1} est l'image de Ω dans la rotation de centre A_n et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

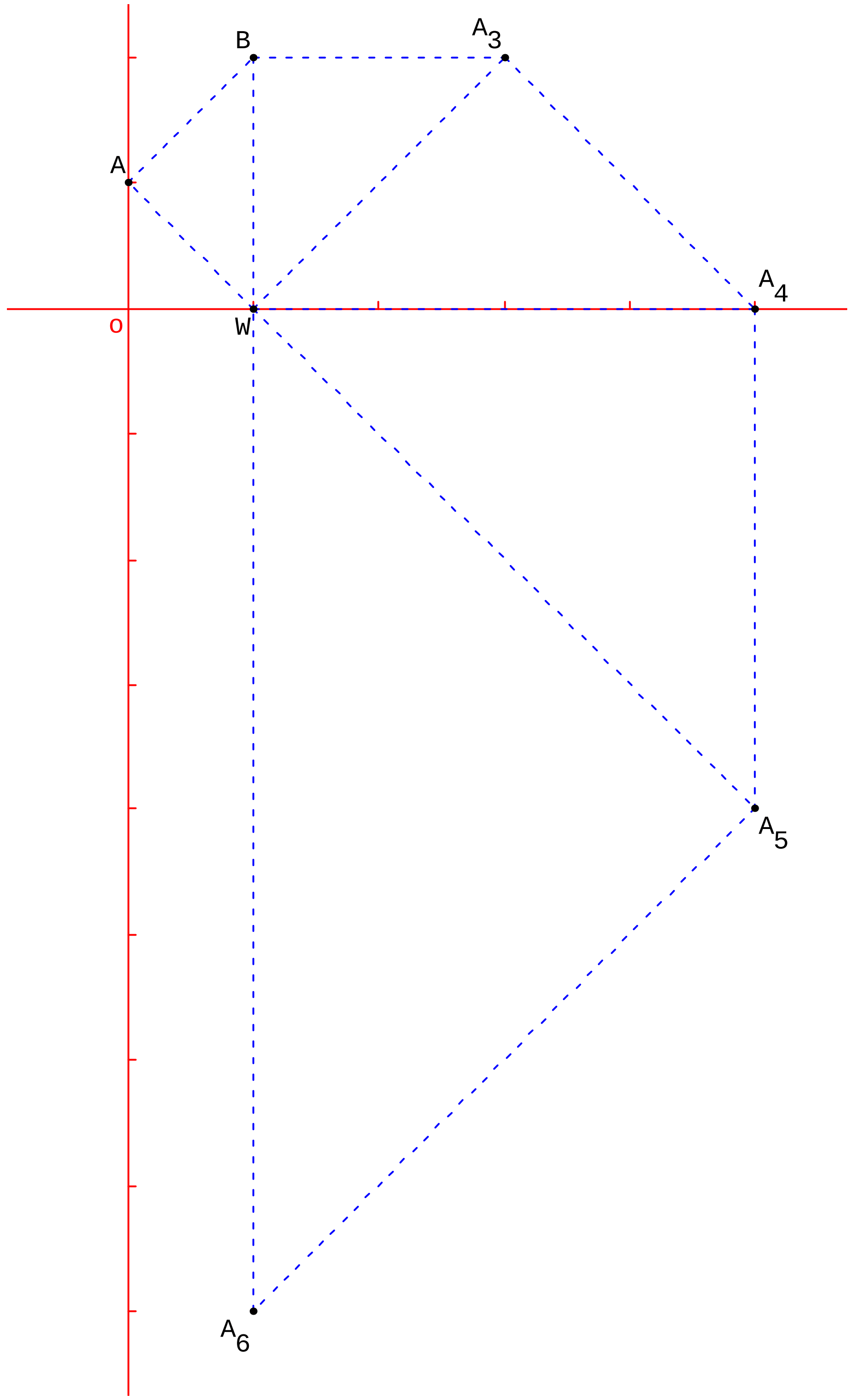
4. A_n appartient à la droite $(\Omega\mathrm{B})$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$ $(2\,\mathrm{i})$ et $\overrightarrow{\Omega A_n}$ $(-(1 - \mathrm{i})^n)$ sont colinéaires soit si et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = k\,\pi$

$(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = \arg -\dfrac{(1-\mathrm{i})^n}{2\,\mathrm{i}} = k\,\pi$

$-\dfrac{(1-\mathrm{i})^n}{2\,\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i})^n$ et $\arg\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i})^n\right) = \arg \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} + n \arg(1 - \mathrm{i})$ donc $\arg -\dfrac{(1-\mathrm{i})^n}{2\,\mathrm{i}} = \dfrac{\pi}{2} - n\,\dfrac{\pi}{4}$

A_n appartient à la droite $(\Omega\mathrm{B})$ si et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $\dfrac{\pi}{2} - n\,\dfrac{\pi}{4} = k\,\pi$

$\dfrac{\pi}{2} - n\,\dfrac{\pi}{4} = k\,\pi \Leftrightarrow 2 - n = 4\,k \Leftrightarrow n = 2 - 4\,k \Leftrightarrow n \equiv 2\ (4)$


B
A3
A
A4
O
W
A5
A6

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Proposition 1 :

Faux : une seule équation définit un plan dans l'espace : les points de coordonnées E(– 2 ; 0 ; 0) F(– 2 ; 0 ; 1) et G(1 ; 6 ; 0) sont tels que $\overrightarrow{EF} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{EG} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux : $\overrightarrow{EF} . \overrightarrow{EG} = x\,x' + y\,y' + z\,z' = 0$ donc les points E, F et G ne sont pas alignés, leurs coordonnées vérifient cependant $y = 2\,x + 4$

Proposition 2 :

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 4\,\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\,\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 3\,\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -3\,\overrightarrow{GM}$

FAUX : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)}, et de rapport – 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires. **FAUX**

$\overrightarrow{DA}$ a pour coordonnées (0, 6, − 5), $\overrightarrow{DB}$ (1, 5, − 2) et $\overrightarrow{DC}$ (− 1, 3, 0)

Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas colinéaires (composantes nulles différentes) si les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires, $\overrightarrow{DB}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{DB} = x\,\overrightarrow{DA} + y\,\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 1 \\ 6\,x + 3\,y = 5 \\ -5\,x = -2 \end{cases}$, donc $y = -1$, $x = -\dfrac{2}{5}$ or $6\,x + 3\,y = -\dfrac{12}{5} - 3 \neq 5$

Équations incompatibles donc les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ (0, 6, − 5), $\overrightarrow{DB}$ (1, 5, − 2) et $\overrightarrow{DC}$ (− 1, 3, 0) ne sont pas coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2\,x + 2\,y + z + 3 = 0$.

VRAI.

La distance du point Ω au plan est égale à $\dfrac{|2\times 3 + 2\times 3 + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \dfrac{15}{3}$ = 5 donc est égale au rayon de la sphère.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

1\. *a*. On *a* une succession de trois expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune d'elles *a* deux issues :

- on obtient le 6 (avec une probabilité $\frac{1}{6}$),
- on n'obtient pas le 6 (avec une probabilité $\frac{5}{6}$),

donc la variable aléatoire X donnant le nombre de 6 obtenus suit une loi binomiale de paramètres (3 ; $\frac{1}{6}$).

b. $E(X) = n\,p = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

c. $P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$

2\. *a*. $p\,(D \cap A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}$

Si l'on a choisi le dé truqué.

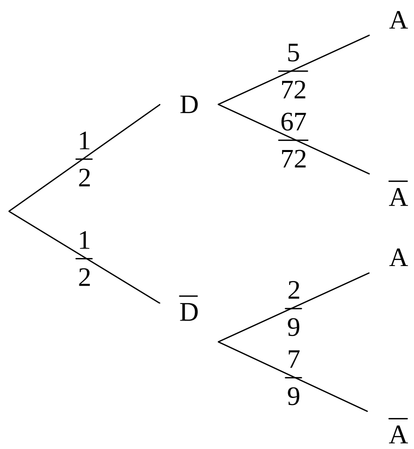
On *a* une succession de trois expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune d'elles *a* deux issues :

- on obtient le 6 (avec une probabilité $\frac{1}{3}$),
- on n'obtient pas le 6 (avec une probabilité $\frac{2}{3}$),

donc la variable aléatoire Y donnant le nombre de 6 obtenus suit une loi binomiale de paramètres (3 ; $\frac{1}{3}$).

$p(Y = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$p(\overline{D} \cap A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$



b. $p(A) = p\,(D \cap A) + p(\overline{D} \cap A) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}$.

c. $p\,(\overline{D} \,/\, A) = \frac{p\,(\overline{D} \cap A)}{p\,(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{1 \times 48}{9 \times 7} = \frac{16}{21}$

3\. *a*. $p_D\,(B_n) = 1 - p_D$ (obtenir aucun 6) $= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$p_{\overline{D}}\,(B_n) = 1 - p_{\overline{D}}$ (obtenir aucun 6) $= 1 - \left(\frac{2}{2}\right)^n$

$p(B_n) = p_D\,(B_n) \times p(D) + p_{\overline{D}}\,(B_n) \times p(\overline{D}) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

$-1 < \frac{5}{6} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p(B_n) = 1$

Si l'on joue suffisamment longtemps, on a une quasi certitude d'obtenir au moins une fois un 6.

Ce résultat est prévisible car, quel que soit le dé, à condition de jouer suffisamment longtemps, on a une quasi certitude d'obtenir au moins une fois un 6.