Primitives

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I; on appelle **primitive** de f sur I toute fonction F définie sur I telle que $\mathbf{F' = f}$.

Propriété
Toute fonction définie et **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I.
Toute primitive G de f sur I est de la forme : $G(x) = F(x) + k$ avec k un nombre réel.

Primitives de fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	I
0	k	$\mathbb{R}$
a	$a\,x + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
x^n		
$n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0, +\infty[$
e^x		$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriétés : Si f et g sont deux fonction admettant sur I des primitives
<u>Somme</u> : Une primitive de la somme des deux fonctions f et g est la somme d'une primitive de f et d'une primitive de g
<u>Multiplication par un réel :</u> la primitive du produit d'une fonction f par un réel λ est le produit d'une primitive F de cette fonction par ce réel λ

Primitives d'une puissance : $f = u^n \,.\, u'$, alors $F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$.

Primitives de l'inverse d'une puissance. : $f = \frac{u'}{u^n}$, alors $F = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$.

On peut aussi utiliser que $f = u'\,u^{-n}$ donc $F = \frac{1}{-n+1}u^{-n+1}$

Primitives de l'inverse d'une racine carrée. $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, alors $F = 2\sqrt{u}$.

on peut aussi utiliser les exposants fractionnaires : $f = u'\;u^{-\frac{1}{2}}$ donc $F = \frac{1}{\frac{-1}{2}+1}u^{\frac{-1}{2}+1} = 2\;u^{\frac{1}{2}}$ donc $F = 2\sqrt{u}$.

Primitives d'une fonction exponentielle. $f = u'\,e^u$ donc $F = e^u$

Primitives de l'inverse d'une fonction $f = \frac{u'}{u}$ donc $F = \ln|u|$

Primitives d'une fonction trigonométrique :
$f = u' \sin u$ donc $F = -\cos u$
$f = u' \cos u$ donc $F = -\sin u$
$f = u'(1 + \tan^2 u)$ ou $f = \frac{u'}{\cos^2 u}$ donc $F = \tan u$