A et B sont deux points distincts du plan.

1. Préciser l'ensemble (E_1) des points M tels que $\frac{MA}{MB} = 1$ et dessiner l'ensemble (E_1).

2. L'ensemble (E_2) correspond au point M du plan tel que $\frac{MA}{MB} = 2$

a. On définit les points G et H par les égalités $\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{HB} = \vec{0}$.

Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis construire le point G.
Après un calcul vectoriel, construire le point H.

b. Montrer que $\frac{MA}{MB} = 2$ équivaut à $\left(\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}\right) = 0$.

En déduire que M appartient à (E_2) équivaut à $\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0$
Déterminer puis dessiner l'ensemble (E_2).

3. On considère le repère $(A\,;\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$. En utilisant la nature de l'ensemble (E_1) et (E_2) ; déterminer une équation cartésienne de ces deux ensembles dans le repère $(A\,;\vec{i},\vec{j})$.

CORRECTION

1. $\frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ (E_1) est la médiatrice de [AB]

2. *a.* On définit les points G et H par les égalités $\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{HB} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\,(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - 2\,\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ B est le milieu de [AG].

$\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{HB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + 2\,(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\,\overrightarrow{AH} + 2\,\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b. $\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA = 2\,MB \Leftrightarrow MA^2 = 4\,MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 4\,\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}\right) = 0$.

$\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 2\,(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB}$ or $\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} + 2\,(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{HB}$ or $\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{MH}$

$\left(\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow -3\;\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0$

M appartient à (E_2) équivaut à $\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0$

$\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0$ donc $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en M donc M décrit le cercle de diamètre [GH].
(E_2) est cercle de diamètre [GH].

3. Dans le repère $(A\,;\vec{i},\vec{j})$, B a pour coordonnées (6 ; 0), le milieu de [AB] a pour coordonnées (3 ; 0), donc la médiatrice de [AB] a pour équation $x = 3$.

$\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AG} = 12\,\vec{i}$,
G a pour coordonnées (12 ; 0)
$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AH} = 4\,\vec{i}$,
H a pour coordonnées (4 ; 0)
$\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow (x - 12)\,(x - 4) + y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16\,x + 48 = 0$