On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	*a*, *b* et *c* sont des nombres réels *i* et *n* sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	*a* prend la valeur 3 *b* prend la valeur 8

Traitement :	Saisir *n*
	Pour *i* variant de 2 à *n* faire
	  c prend la valeur *a*
	  a prend la valeur *b*
	  b prend la valeur …
	Fin Pour

Sortie :	Afficher *b*

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = A\,C_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer Q P.

On admet que $A = P\,D\,Q$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P\,D^n\,Q$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

Pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$.

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

CORRECTION

1. $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 5 \times 8 - 6 \times 3 = 22$ et $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 5 \times 22 - 6 \times 8 = 62$

2.

Variables :	*a*, *b* et *c* sont des nombres réels *i* et *n* sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	*a* prend la valeur 3 *b* prend la valeur 8
Traitement :	Saisir *n* Pour *i* variant de 2 à *n* faire
	c prend la valeur *a* *a* prend la valeur *b* *b* prend la valeur **5 × *a* –6 × *c***
	Fin Pour
Sortie :	Afficher *b*

b. La suite (u_n) semble être croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ donc $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A \neq O$ donc $A^0 = I$

Initialisation : $C_0 = A^0 C_0$

Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $C_n = A^n C_0$ alors $C_{n+1} = A^{n+1} C_0$

$C_{n+1} = A\,C_n$ et $C_n = A^n C_0$ donc $C_{n+1} = A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$Q\,P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $Q\,P = I$

Initialisation : $A^1 = P\,D\,Q$
Hérédité : Montrons que pour tout n de N*, si $A^n = P\,D^n\,Q$ alors $A^{n+1} = P\,D^{n+1}\,Q$
$A^{n+1} = A \times A_n = P\,D\,Q \times P\,D^n\,Q = P\,D \times D^n\,Q = P\,D^{n+1}\,Q$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n non nul, $A^n = P\,D^n\,Q$.

5. Pour tout entier naturel non nul n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

$u_n = (-2^n + 3^n) \times 8 + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n) \times 3$
$u_n = 2^n + 3^n \times 2$
$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.