

Exercice 1 (12 points)

L'objectif de cet exercice est d'utiliser une modélisation du pourcentage de bacheliers en France entre 1951 et 1985 puis d'en bâtir une deuxième sur la période allant de 1985 à 2010.

Partie A : Etude d'une fonction logistique.

Considérons la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par la relation: $f(x) = \frac{33}{1 + 1417 e^{-0,11x}}$

On désigne par C_1 la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé.

- On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,11x} = 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Donner l'interprétation graphique de ce résultat.
- a. Calculer la dérivée f' de la fonction f et montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{5143,71 e^{-0,11x}}{(1 + 1417 e^{-0,11x})^2}$.
- b. En déduire le tableau des variations complet de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

Partie B : une fonction rationnelle

Considérons maintenant la fonction g définie sur $[85; +\infty[$ par la relation $g(x) = \frac{-871}{x-70} + 87,5$.

On donne ci-dessous le tableau des variations complet de la fonction g .

x	85	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$\approx 29,4$	87,5

- Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[85; +\infty[$.
- Montrer que; $\int_{85}^{110} g(x) dx = 871 \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2187,5$.
- En déduire une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[85; 110]$.

Partie C modélisation du pourcentage de bacheliers en France entre 1951 et 1985.

Le pourcentage des bacheliers en France entre 1951 et 1985 et suivant une même classe d'âge est rapporté dans le tableau 1:

Tableau 1

Année	1951	1956	1966	1968	1970	1974	1977	1980	1985
Rang	51	56	66	68	70	74	77	80	85
pourcentage	5,3	7,4	12,5	19,6	20,1	23,7	24,6	25,9	29,4

Source RERS ministère de l'éducation nationale

- a. On donne en annexe 1 à rendre avec la copie le tracé du nuage de points associé au tableau n°1. Construire sur ce même dessin la représentation graphique C_1 de la fonction f étudiée partie A ainsi que l'asymptote. La courbe C_1 sera tracée à partir de $x = 48$. On remplira au préalable le tableau de valeurs fourni dans cette même annexe (arrondir à 0,1).
- b. La fonction f modélise-t-elle convenablement l'évolution du pourcentage de bacheliers sur la période 1951-1985?
2. À partir de ce modèle, donner une prévision, en utilisant la partie A, de la proportion maximale de bacheliers en France dans les années suivantes.

Partie D modélisation de la proportion de bacheliers en France de 1985 jusqu'en 2010.

À partir de 1985, sous l'influence de facteurs divers, dont la création du baccalauréat professionnel, la proportion de bacheliers en France par classe d'âge augmente significativement. Le tableau 2 en fournit quelques valeurs :

Tableau n° 2:

Année	1985	1990	2005	2007	2010
Rang	85	90	105	107	110
Proportion en %	29,4	43,5	61,4	62,9	65,7

Source RERS 2011, ministère de l'éducation nationale

- Le modèle utilisé dans la partie C vous paraît-il fiable sur cette période? Justifiez succinctement voire réponse.
- On donne en annexe 2 le nuage de points associé au tableau n° 2 ainsi que le tracé d'une courbe qui approche au mieux ce nuage. Le logiciel stipule que la courbe est la représentation graphique d'une fonction g définie par la relation : $g(x) = \frac{a}{x-70} + b$ avec a et b deux réels fixes.
- a. Exprimer $g(85)$ et $g(110)$ en fonction des réels a et b .
- b. En admettant que la courbe associée à la fonction g passe par les points de coordonnées $(85; 29,4)$ et $(110; 65,7)$, justifier que les réels a et b vérifient le système (S) :
$$\begin{cases} a + 15b = 441 \\ a + 40b = 2628 \end{cases}$$

c. Résoudre le système (S). On donnera les valeurs exactes de a et b .

3. On admet que la fonction g recherchée est celle fournie dans la partie B (les valeurs de a et b ont été arrondies).

En vous aidant des résultats donnés dans la partie B:

- Donner une prévision du pourcentage maximal de bacheliers en France par classe d'âge les années suivantes.
- Interpréter par une phrase le résultat obtenu à la question 3. de la partie B.

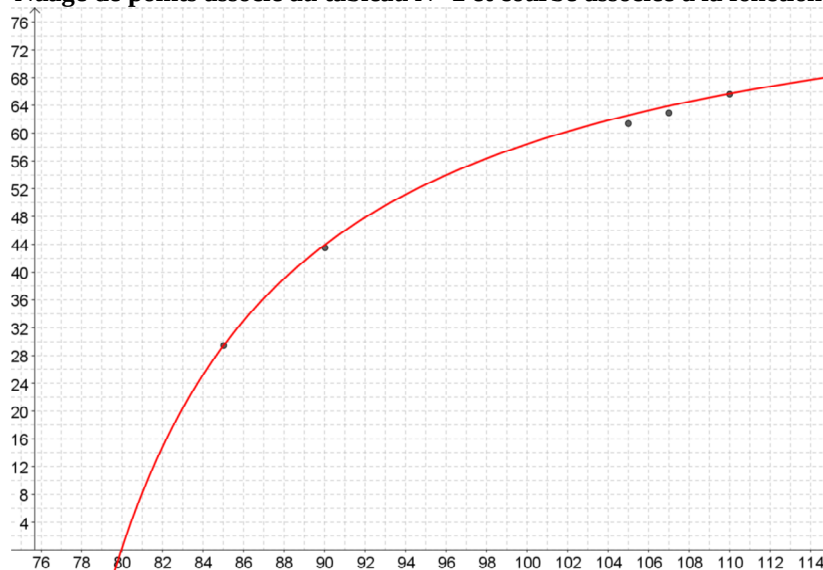
Annexe I à rendre avec la copie
Nuage de points associé au tableau N° 1

Tableau de valeurs

x	48	51	55	60	65	70	75	80	85
$f(x)$									

Annexe 2

Nuage de points associé au tableau N° 2 et courbe associée à la fonction



Exercice 2 (8 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Q.C.M.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque item, une seule des trois affirmations proposées est vraie. Chaque réponse juste rapporte un point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si la somme des points est négative, elle est ramenée à zéro.

1. Chaque année, plusieurs dizaines de milliers de personnes empruntent les chemins de Saint Jacques de Compostelle. Le tableau ci-dessous donne le nombre annuel de pèlerins arrivés à Compostelle en Espagne depuis 2005 (année 2010 exclue).

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2011
Rang de l'année x	0	1	2	3	4	6
Nombre de pèlerins y	93925	100377	114026	125143	145878	179919

Source: bureau des pèlerins de Saint-Jacques de Compostelle

a. On admet que le nuage de points associé à cette série statistique est rectiligne. L'équation de la droite de régression de y en x associée à la série est :

Réponse 1 : $y = 14664,4x + 87439,6$

Réponse 2 : $y = 16697,2x + 79054,2$

Réponse 3 : $y = 16502,6x + 85288,2$

b. En 2010, le nombre de pèlerins enregistrés à Compostelle fut de 272 703.

Le taux de variation du nombre de pèlerins enregistrés par rapport au nombre théorique issu du modèle de la régression affine est approximativement égal à (arrondi à 0,1 %) :

Réponse 1 : 69,6%

Réponse 2 : 41%

Réponse 3 : 1,7%

2. En 2011, les pèlerins arrivant à Compostelle ont répondu à un questionnaire leur demandant les principales motivations de leur pèlerinage. Les réponses sont les suivantes :

51 % l'ont fait pour des raisons culturelles et religieuses ;

43 % l'ont fait pour des raisons strictement religieuses ;

6 % l'ont fait pour des raisons strictement culturelles.

De plus, on sait que 58 % des pèlerins sont des hommes et 42 % des femmes.

On choisit un pèlerin au hasard. On considère les événements suivants:

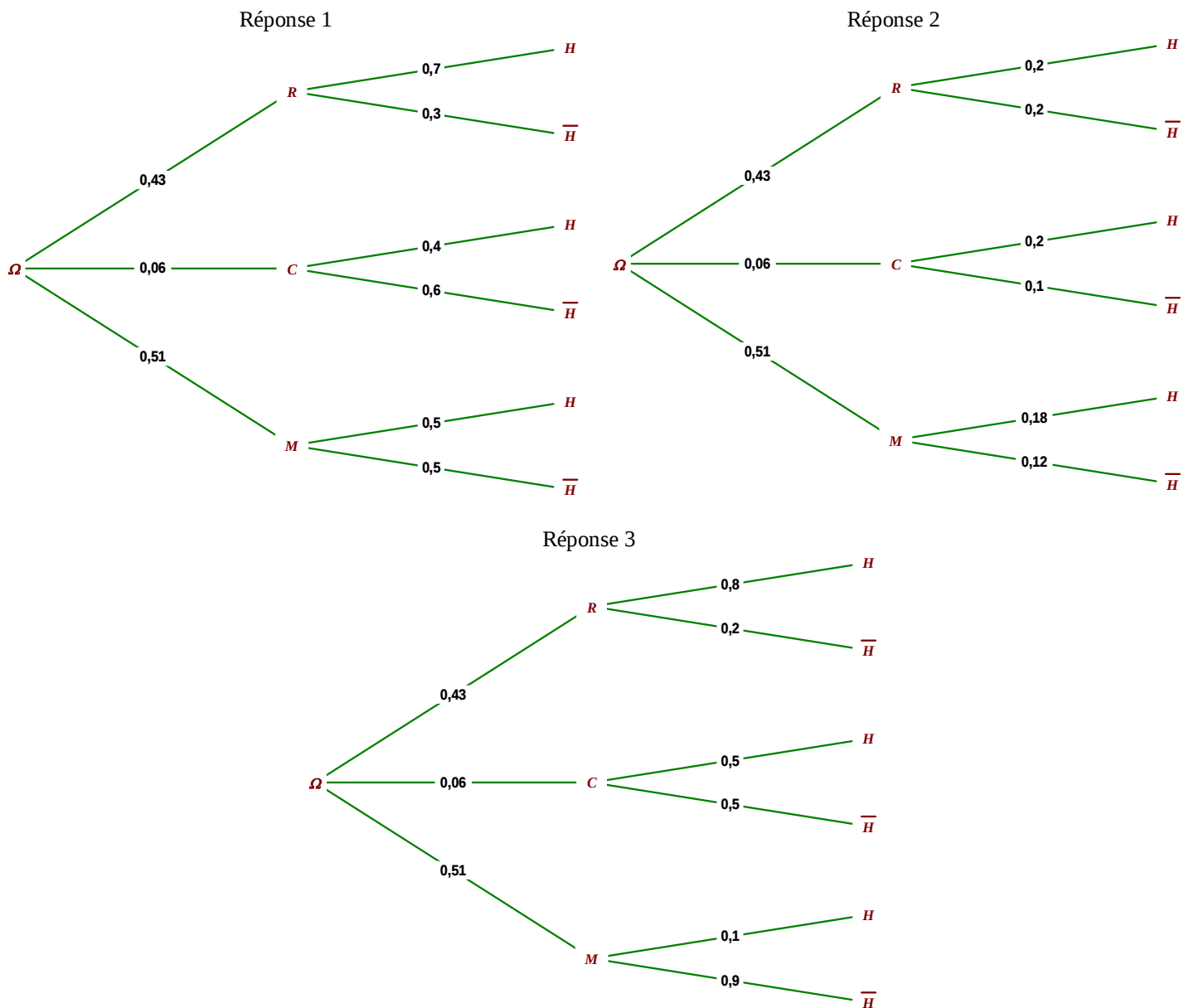
R : « le pèlerin choisi a fait le chemin pour des raisons strictement religieuses »;

C : « le pèlerin choisi a fait le chemin pour des raisons strictement culturelles »;

M : « le pèlerin choisi a fait le chemin pour des raisons culturelles et religieuses »;

H : « le pèlerin choisi est un homme ».

Parmi les trois diagrammes proposés ci-dessous, lequel est un arbre de probabilité susceptible de décrire la situation donnée ?



3. On considère la suite (w_n) ainsi définie: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n - 6$ et $w_0 = 4$. Le terme w_{10} est égal à:
- Réponse 1 : 12 Réponse 2 : - 1 018 Réponse 3 : - 2 042

Partie B

Tous les résultats de la partie B seront arrondis, si nécessaire, à 0,0001 près.

En 2007, 38 % des Allemands venus en France le sont pour des raisons professionnelles, et 62 % pour des raisons touristiques ou personnelles.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout groupe de dix Allemands présents en France, associe le nombre de ceux venus pour des raisons professionnelles.

On suppose que le nombre d'Allemands venus en France est suffisamment grand pour assimiler le choix aléatoire de dix de ces Allemands à un tirage avec remise.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Justifier la réponse en précisant les paramètres de la loi.
2. Dix Allemands se retrouvent un soir dans une brasserie parisienne.
 - a. Quelle est la probabilité que neuf d'entre eux soient présents en France pour des raisons touristiques ou personnelles ?
 - b. Déterminer la probabilité $P(X \geq 1)$. Interpréter le résultat obtenu.
3. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout Allemand présent en France, associe la distance en km qu'il aura parcourue pendant son séjour.

On admet que Y suit la loi normale de moyenne $m = 2\,000$ km et d'écart type $\sigma = 550$ km.

- a. Déterminer $P(Y \leq 3200)$ et interpréter, à l'aide d'une phrase, le résultat obtenu.
- b. Déterminer la probabilité qu'un Allemand, choisi au hasard, parcoure en France une distance comprise entre 1 300 km et 2 700 km.

Correction

Exercice n° 1 (12 points)

Partie A : étude d'une fonction logistique.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,11x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 1417 e^{-0,11x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 33$. La droite d'équation $y = 33$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe.

2. a. $f(x) = 33 \times \frac{1}{1 + 1417 e^{-0,11x}}$

$f(x)$ est de la forme $k \times \frac{1}{u(x)}$ avec $k = 33$ et $u(x) = 1 + 1417 e^{-0,11x}$

La dérivée de e^v est $v' e^v$ donc la dérivée de $e^{-0,11x}$ est $-0,11 e^{-0,11x}$ donc $u'(x) = 1417 \times (-0,11) e^{-0,11x}$

$f'(x) = k \times \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$ donc $f'(x) = 33 \times \frac{-(-1417 \times 0,11 e^{-0,11x})}{(1 + 1417 e^{-0,11x})^2}$

Pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{5143,71 e^{-0,11x}}{(1 + 1417 e^{-0,11x})^2}$.

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\approx 0,02$	33

Partie B : une fonction rationnelle

1. Soit $u(x) = x - 70$, $u'(x) = 1$ donc $g(x) = -871 \times \frac{u'(x)}{u(x)} + 87,5$

Sur $[85; +\infty[$, $x - 70 > 0$ donc une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[85; +\infty[$ est $G(x) = -871 \ln(x - 70) + 87,5x$

2. $\int_{85}^{110} g(x) dx = G(110) - G(85)$

$\int_{85}^{110} g(x) dx = -871 \ln 40 + 87,5 \times 110 - [-871 \ln 15 + 87,5 \times 85]$

$\int_{85}^{110} g(x) dx = 871 (\ln 15 - \ln 40) + 2187,5$ or si a et b sont deux nombres strictement positifs, $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$\int_{85}^{110} g(x) dx = 871 \ln\left(\frac{15}{40}\right) + 2187,5$.

$\int_{85}^{110} g(x) dx = 871 \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2187,5$.

3. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[85; 110]$ est $\frac{1}{110 - 85} \int_{85}^{110} g(x) dx$ donc une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[85; 110]$ est 55,4

Partie C modélisation du pourcentage de bacheliers en France entre 1951 et 1985.

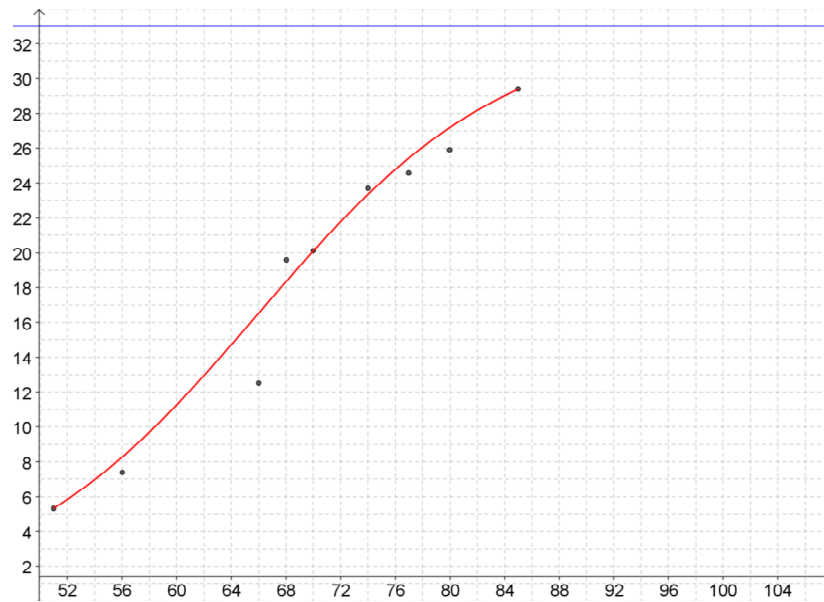
1. a. Tableau de valeurs

x	48	51	55	60	65	70	75	80	85
$f(x)$	4,0	5,3	7,6	11,3	15,6	20,1	24,1	27,2	29,4

b. Approximativement les points du nuage sont proches de la courbe donc la fonction f modélise convenablement l'évolution du pourcentage de bacheliers sur la période 1951-1985.

2. f est croissante sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 33$.

À partir de ce modèle, la proportion maximale de bacheliers en France dans les années suivantes est 33.



Partie D modélisation de la proportion de bacheliers en France de 1985 jusqu'en 2010.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 33$ or à partir de 2005, la proportion de bacheliers en France dépasse 60 % donc le modèle utilisé dans la partie C ne convient pas.

2. a. $g(85) = \frac{a}{85-70} + b = \frac{a}{15} + b$ et $g(110) = \frac{a}{110-70} + b = \frac{a}{40} + b$

b. La courbe associée à la fonction g passe par les points de coordonnées (85 ; 29,4) et (110 ; 65,7), donc

$$\begin{cases} \frac{a}{15} + b = 29,4 \\ \frac{a}{40} + b = 65,7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15 \times \left(\frac{a}{15} + b \right) = 15 \times 29,4 \\ 40 \times \left(\frac{a}{40} + b \right) = 40 \times 65,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 15b = 441 \\ a + 40b = 2628 \end{cases}$$

c. $a = 441 - 15b$ donc en remplaçant dans la seconde ligne : $441 - 15b + 40b = 2628$

soit $25b = 2628 - 441$ donc $25b = 2187$ donc $b = \frac{2187}{25} = 87,48$

$a = 441 - 15b$ donc $a = -871,2$ donc $g(x) = -\frac{871,2}{x-70} + 87,48$

3. a. g est croissante et admet pour limite 87,5 quand x tend vers $+\infty$. Le pourcentage maximal de bacheliers est donc de 87,5%.

b. Le pourcentage moyen de bacheliers entre 1985 et 2010 est d'environ 53,3%.

Exercice 2 (8 points)**Partie A : Q.C.M.****1. a. Réponse 1**

L'équation de la droite de régression de y en x associée à la série est : $y = 14664,4x + 87439,6$

b. Réponse 1 : 69,6%

D'après la droite de régression, le nombre de pèlerins est : $14664,4 \times 5 + 87439,6 = 160761,6$

Le taux d'évolution est : $\frac{272\,703 - 160\,761,6}{160\,761,6} \approx 0,696$

2. Réponse 1

58 % des pèlerins sont des hommes donc $p(H) = 0,58$ or $p(H) = p(H \cap R) + p(H \cap C) + p(H \cap M)$

dans le cas de la réponse 1, on obtient : $p(H \cap R) + p(H \cap C) + p(H \cap M) = 0,43 \times 0,7 + 0,06 \times 0,4 + 0,51 \times 0,5 = 0,58$ soit 58 % d'hommes

dans le cas de la réponse 2, on obtient : $p(H \cap R) + p(H \cap C) + p(H \cap M) = 0,43 \times 0,2 + 0,06 \times 0,2 + 0,51 \times 0,18 = 0,1898$ soit 18,98 % d'hommes

dans le cas de la réponse 3, on obtient : $p(H \cap R) + p(H \cap C) + p(H \cap M) = 0,43 \times 0,8 + 0,06 \times 0,5 + 0,51 \times 0,1 = 0,425$ soit 42,5 % d'hommes

3. Réponse 3 : - 2 042

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_n	4	2	-2	-10	-26	-58	-122	-250	-506	-1018	-2042

Partie B

1. On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

succès : la personne est venue pour des raisons professionnelles ($p = 0,38$)

échec : la personne n'est pas venue pour des raisons professionnelles ($q = 1 - p = 0,62$)

donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,38).

2. a. Si neuf allemands sur 10 sont présents en France pour des raisons touristiques ou personnelles alors 1 seul est venu pour des raisons professionnelles. $P(X = 1) = 0,0514$

b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,9916$.

La probabilité qu'au moins un des dix Allemands soit là pour des raisons professionnelles est 0,9916.

3. a. $T = \frac{Y - 2\,000}{550}$, T suit une loi normale centrée réduite.

$$P(Y \leq 3\,200) = P\left(T \leq \frac{3\,200 - 2\,000}{550}\right) = P(T \leq 2,18) \text{ donc } P(Y \leq 3\,200) = 0,9854$$

La probabilité qu'un Allemand, choisi au hasard, parcoure en France une distance inférieure à 3200 km est 0,9854.

$$b. \quad P(1\,300 \leq Y \leq 2\,700) = P\left(\frac{1\,300 - 2\,000}{550} \leq T \leq \frac{2\,700 - 2\,000}{550}\right)$$

$$P(1\,300 \leq Y \leq 2\,700) = P(-1,27 \leq T \leq 1,27) = 2P(T \leq 1,27) - 1 = 0,7969.$$