Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = 3 + 2\ln(x) - \ln^2(x)$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer la limite de f en 0. En déduire une asymptote à C.
2. Mettre en facteur $\ln^2(x)$ dans $f(x)$ puis calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$, $f'(x) = 2\dfrac{1-\ln x}{x}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^{*+}$ l'inéquation $1 - \ln(x) > 0$
5. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
6. Calculer $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ et $f(e^3)$. Que peut-on en déduire de C ?
7. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$.
8. Tracer C dans le repère donné. Placer le point A et construire la tangente trouvée à la question 7
9. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = -x(\ln^2(x) - 4\ln x + 1)$

Calculer $g'(x)$ et en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}^{*+}$.

CORRECTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = 3 + 2\ln(x) - \ln^2(x)$

1. $f(x) = 3 + \ln x(2 - \ln x)$ or $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 2 - \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

2. $f(x) = 3 + \ln^2 x\left(\dfrac{2}{\ln x} - 1\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\ln x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2\,u\,u'$ ici $u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$,

donc la dérivée de la fonction $x \to \ln^2 x$ est $2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$.

$f'(x) = 2\dfrac{1}{x} - 2\dfrac{1}{x}\ln x$ donc $f'(x) = 2\dfrac{1-\ln x}{x}$

4. $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1$ et $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$

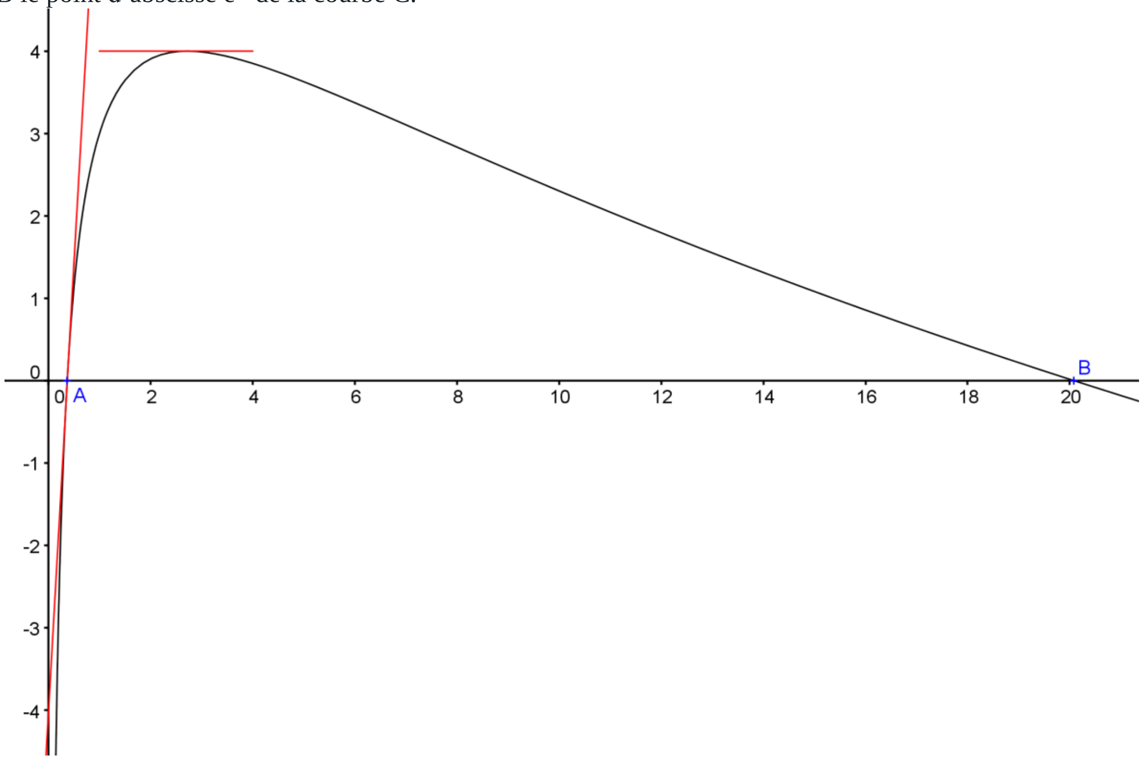
5.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

6. $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$ donc $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ et $\ln e^3 = 3$ donc $f(e^3) = 0$. C coupe l'axe des abscisses en les points d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et e^3.

7. $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 4\,e$ donc la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ est $y = 4\,e\left(x - \dfrac{1}{e}\right)$ soit $y = 4\,e\,x - 4$

8. Soit B le point d'abscisse e^3 de la courbe C.



9. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = -x\,(\ln^2(x) - 4\ln x + 1)$

Soit $u(x) = -x$ $u'(x) = -1$

et $v(x) = \ln^2(x) - 4\ln x + 1$ $v'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} - 4 \times \dfrac{1}{x} = 2\dfrac{\ln x - 2}{x}$

$g'(x) = -(\ln^2(x) - 4\ln x + 1) - 2x\dfrac{\ln x - 2}{x}$

$g'(x) = -\ln^2(x) + 4\ln x - 1 - 2(\ln x - 2)$

$g'(x) = 3 + 2\ln x - \ln^2 x$

$g'(x) = f(x)$ donc g est une primitive de f sur $\mathbb{R}^{*+}$.