Soit z, z' et t trois nombres complexes tels que $z\,z' = t^2$

Montrer que $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2} + t\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} - t\right|$

CORRECTION

Cas particulier :

Si z est nul comme $z\,z' = t^2$ alors $t = 0$, l'égalité est alors triviale : $\left|\dfrac{z+z'}{2} + t\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} - t\right| = \left|\dfrac{z'}{2}\right| + \left|\dfrac{z'}{2}\right| = \dfrac{1}{2}|z'| + \dfrac{1}{2}|z'| = |z'| + |0|$

soit si $z = t = = 0$: $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2} + t\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} - t\right|$.

Si $z \neq 0$ alors $z' = \dfrac{t^2}{z}$

$$z + z' + 2t = \frac{z^2 + t^2}{z} + 2t = \frac{z^2 + t^2 + 2tz}{z} = \frac{(z+t)^2}{z}$$

$$z + z' - 2t = \frac{z^2 + t^2}{z} - 2t = \frac{(z-t)^2}{z}$$

$$\left|\frac{(z+t)^2}{z}\right| = \frac{|z+t|^2}{|z|} = \frac{1}{|z|}(z+t)(\bar{z}+\bar{t}) = \frac{1}{|z|}(z\bar{z} + z\bar{t} + t\bar{z} + t\bar{t})$$

$$\left|\frac{(z-t)^2}{z}\right| = \frac{|z-t|^2}{|z|} = \frac{1}{|z|}(z-t)(\bar{z}-\bar{t}) = \frac{1}{|z|}(z\bar{z} - z\bar{t} - t\bar{z} + t\bar{t})$$

$$\left|\frac{(z+t)^2}{z}\right| + \left|\frac{(z-t)^2}{z}\right| = \frac{1}{|z|}(z\bar{z} + z\bar{t} + t\bar{z} + t\bar{t}) + \frac{1}{|z|}(z\bar{z} - z\bar{t} - t\bar{z} + t\bar{t})$$

$$\left|\frac{(z+t)^2}{z}\right| + \left|\frac{(z-t)^2}{z}\right| = \frac{1}{|z|}(2z\bar{z} + 2t\bar{t})$$

$$\left|\frac{(z+t)^2}{z}\right| + \left|\frac{(z-t)^2}{z}\right| = \frac{1}{|z|}(2|z|^2 + 2|t|^2)$$

$$\left|\frac{(z+t)^2}{z}\right| + \left|\frac{(z-t)^2}{z}\right| = 2|z| + 2\frac{|t|^2}{|z|}$$

$|z + z' + 2t| + |z + z' - 2t| = 2|z| + 2|z'|$ donc $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2} + t\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} - t\right|$