Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$a_n = 4 \times 10^n - 1$, $b_n = 2 \times 10^n - 1$ et $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

1. *a.* Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 , a_3, b_3, c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ?

Démontrez que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Démontrez en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 que b_3 est premier.

d. Démontrez que, pour tout entier naturel n non nul,

$$b_n \times c_n = a_{2n}.$$

Déduisez-en la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e. Démontrez que PGCD(b_n ; c_n = PGCD(c_n ; 2). Déduisez que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation [1] $b_3\, x + c_3\, y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifiez le fait que [1] possède au moins une solution.

b. Appliquez l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; déduisez-en une solution particulière de [1].

c. Résoudre [1].

CORRECTION

1. *a.* $a_1 = 39$ $a_2 = 399$ $a_3 = 3999$ $b_1 = 19$ $b_2 = 199$ $b_3 = 1999$ $c_1 = 21$ $c_2 = 201$ $c_3 = 2001$

b. 10^n comporte $n + 1$ chiffres (1 et 0 répété n fois) donc 4×10^n comporte $n + 1$ chiffres : 4 et 0 répété n fois

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & {}^{1}0 & \dots & {}^{1}0 & {}^{1}0 \\ - & {}_{1} & {}_{1} & \dots & {}_{1} & 1 \\ \hline & 3 & 9 & \dots & 9 & 9 \end{array}$$

$4 \times 10^n - 1$ comporte $n + 1$ chiffres : 3 et 9 répété n fois

10^n comporte $n + 1$ chiffres donc 2×10^n comporte $n + 1$ chiffres : 2 et 0 répété n fois

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & {}^{1}0 & \dots & {}^{1}0 & {}^{1}0 \\ - & {}_{1} & {}_{1} & \dots & {}_{1} & 1 \\ \hline & 1 & 9 & \dots & 9 & 9 \end{array}$$

$2 \times 10^n - 1$ comporte $n + 1$ chiffres : 1 et 9 répété n fois, donc a_n et c_n comportent $n + 1$ chiffres

$10 = 3 \times 3 + 1$ donc $10 \equiv 1\ [3]$, $4 \equiv 1\ [3]$ donc $4 \times 10^n \equiv 1 \times 1^n\ [3]$ donc $4 \times 10^n - 1 \equiv 1 - 1\ [3]$ donc $a_n \equiv 0\ [3]$

$10 \equiv 1\ [3]$, donc $2 \times 10^n \equiv 2 \times 1^n\ [3]$ donc $2 \times 10^n + 1 \equiv 2 + 1\ [3]$ donc $c_n \equiv 0\ [3]$

a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. $b_3 = 1999$, $44 < \sqrt{1999} < 45$

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 44 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Aucun ne divise 1999 donc 1999 est un nombre premier.

d. Pour tout entier naturel n non nul, $b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1) \times (2 \times 10^n + 1) = (2 \times 10^n)^2 - 1^2 = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$.

$a_6 = a_{2 \times 3} = b_3 \times c_3 = 1999 \times 2001$

$2001 = 3 \times 667 = 3 \times 23 \times 29$ donc la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6 est $3 \times 23 \times 29 \times 1999$

e. $c_n - b_n = (2 \times 10^n + 1) - (2 \times 10^n - 1) = 2$ donc PGCD(b_n ; c_n) = PGCD(c_n ; 2).

$c_n = 2 \times 10^n + 1$ donc c_n est un nombre impair donc n'est pas divisible par 2 donc PGCD(c_n ; 2) = 1

PGCD(b_n ; c_n) = PGCD(c_n ; 2) = 1 donc b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. *a.* b_n et c_n sont premiers entre eux donc en particulier b_3 et c_3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers x et y tels que $b_3\, x + c_3\, y = 1$ donc [1] possède au moins une solution.

b. $c_3 = 2001 = b_3 + 2$ et $b_3 = 2 \times 999 + 1$

$$\begin{cases} c_3 = b_3 + 2 \\ b_3 = 2 \times 999 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 999\, c_3 = 999\, b_3 + 2 \times 999 \\ b_3 = 2 \times 999 + 1 \end{cases}$$ donc par différence terme à terme :

$-999 \times c_3 + b_3 = -999 \times b_3 - 2 \times 999 + 2 \times 999 + 1$

soit $-999 \times c_3 = -1000 \times b_3 + 1$ donc $1000\, b_3 - 999\, c_3 = 1$ donc (1000 ; – 999) est une solution particulière de [1].

c. $$\begin{cases} x\ b_3 - y\ c_3 = 1 \\ 1000\, b_3 - 999\, c_3 = 1 \end{cases}$$ donc $b_3\,(x - 1000) - c_3\,(y - 999) = 0 \Leftrightarrow b_3\,(x - 1000) = c_3\,(y - 999)$

b_3 et c_3 sont premiers entre eux, b_3 divise $c_3\,(y - 999)$ donc, d'après le théorème de Gauss) b_3 divise $c_3 - 999$.

Il existe un entier k tel que $c_3 - 999 = k\, b_3$

En remplaçant dans $b_3\,(x - 1000) = c_3\,(y - 999)$ on a que $b_3\,(x - 1000) = c_3 \times k\, b_3$ donc que $x - 1000 = k\, c_3$

Toute solution de [1] est donc de la forme ($k\, c_3 + 1000$; $k\, b_3 + 999$) avec $k \in \mathbb{N}$.

Vérification : est-ce que ($k\, c_3 + 1000$; $k\, b_3 + 999$) est solution de [1] ?

$b_3\,(k\, c_3 + 1000) - (k\, b_3 + 999)\, c_3 = k\, b_3\, c_3 + 1000\, b_3 - k\, b_3\, c_3 - 999\, c_3 = 1000\, b_3 - 999\, c_3 = 1$

($k\, c_3 + 1000$; $k\, b_3 + 999$) est solution de [1]. Les solutions de [1] sont de la forme ($k\, c_3 + 1000$; $k\, b_3 + 999$).