Polynésie juin 2008

EXERCICE 1 4 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives : $a = 3 - 2i$, $b = 3 + 2i$, $c = 4i$.

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.
3. Montrer que OABC est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$.
6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M. On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

b. Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

EXERCICE 2 4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

$$A(1 ; 2 ; 3),\ B(0 ; 1 ; 4),\ C(-1 ; -3 ; 2),\ D(4 ; -2 ; 5)$$

et le vecteur $\vec{n}\ (2 ; -1 ; 1)$.

1. *a*. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète. ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A ; +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

Proposition 2 : « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\,g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.

Sa masse initiale est de 10 kg.

Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 *g* ».

4. Soient A et B deux évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(A) = p(B) = 0{,}4$ alors $p(A \cup B) = 0{,}8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique *a* montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication.

Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses. On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,950 8 ».

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5) . »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal. direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - i$ a pour écriture complexe :

$$z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}\ . \text{ »}$$

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère un point A. On désigne par a son affixe.

On note s la réflexion d'axe $(O ; \vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

EXERCICE 4 7 points

Partie A

Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$.

– Si $u \geq 0$ sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b u(x)\,dx \geq 0$.

– Pour tous réels α et β,

$$\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,dx = \alpha \int_a^b u(x)\,dx + \beta \int_a^b v(x)\,dx$$

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$ sont données ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0 ; +\infty[$.

2. *a*. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (D).

***b*.** Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

3. Soit I l'intégrale définie par : $I = \int_0^1 \ln(1 + e^{-x})\,dx = \int_0^1 [f(x) - x]\,dx$

***a*.** Donner une interprétation géométrique de I.

***b*.** Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\ln(1 + t) \leq t$.

(On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(t) = \ln(1 + t) - t$.)

On admettra que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\frac{t}{t+1} \leq \ln(1 + t)$.

***c*.** En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a : $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$

***d*.** Montrer que : $\ln\left(\frac{2}{1 + e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}$.

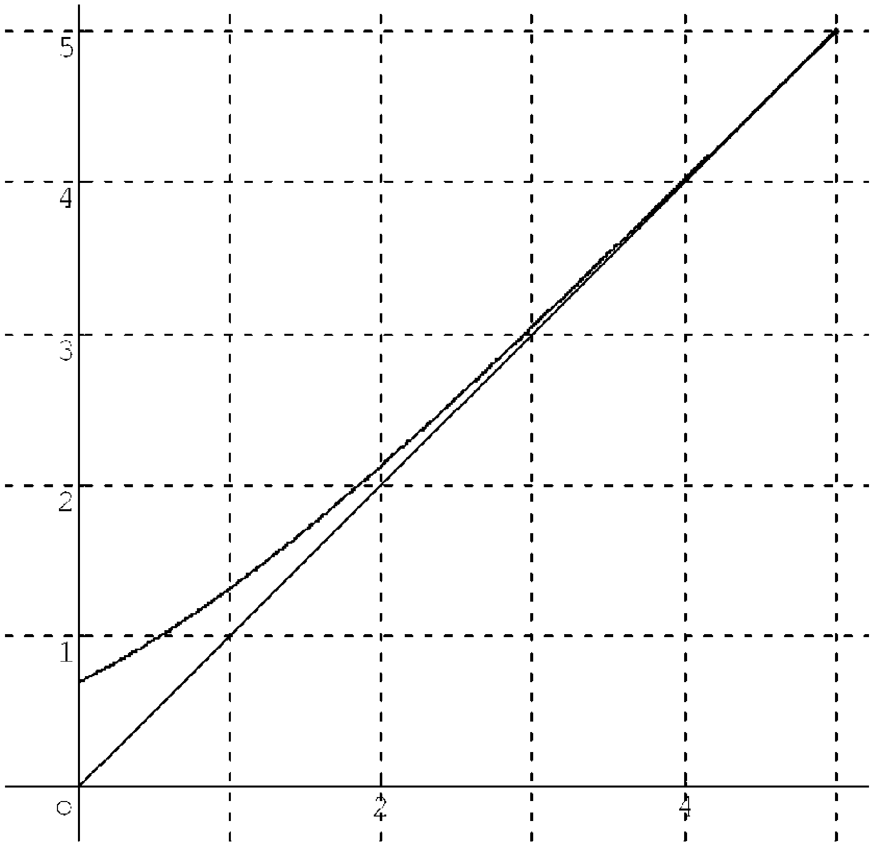
***e*.** En déduire un encadrement de I d'amplitude 0,4 par deux nombres décimaux.

4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à $(\mathscr{C})$ et (D).

On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

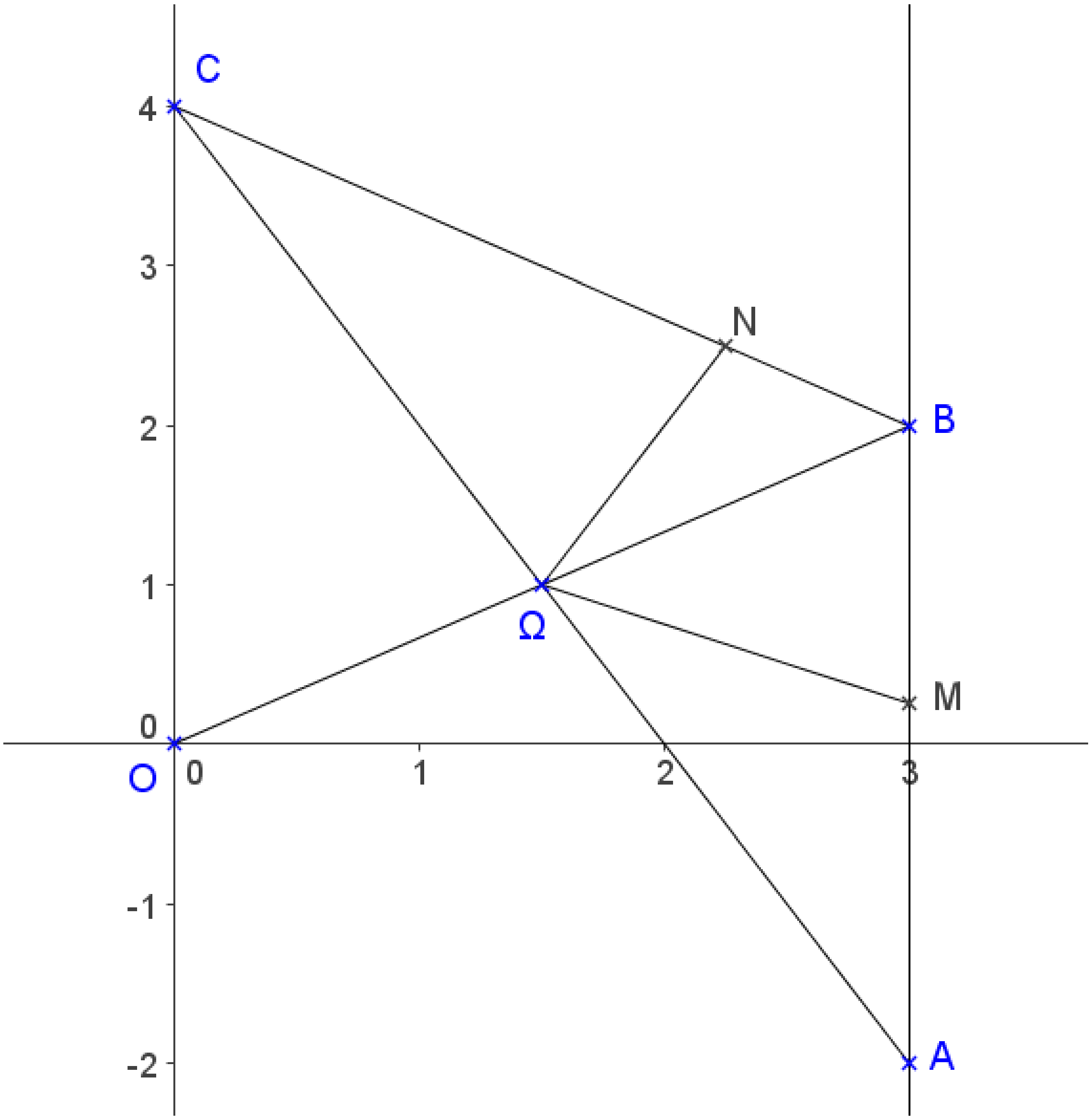

5
4
3
2
1
O
2
4

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points

1. $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 2\,\mathrm{i}$ ou $z - 3 = -2\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 3 + 2\,\mathrm{i}$ ou $z = 3 - 2\,\mathrm{i}$.

2.



3. $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe $a = 3 - 2\,\mathrm{i}$; $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $b - c = 3 - 2\,\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ donc OABC est un parallélogramme.

4. Le point Ω centre du parallélogramme est le milieu de {OB] donc l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC est $\frac{1}{2}b = \frac{3}{2} + \mathrm{i}$

5. $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\,\overrightarrow{M\Omega}$ donc $\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12 \Leftrightarrow 4\,M\Omega = 12 \Leftrightarrow M\Omega = 3$ donc l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$ est le cercle de centre Ω de rayon 3.

6. La droite (AB) a pour équation $x = 3$, donc l'affixe du point M est $z = 3 + \beta\,\mathrm{i}$.

a. N est l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $n - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(m - \omega)$

donc $n = \mathrm{i}\,(3 + \beta\,\mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i})\left(\frac{3}{2} + \mathrm{i}\right)$ soit $n = 3\,\mathrm{i} - \beta + \frac{3}{2} + \mathrm{i} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i} + 1$ donc N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}\,\mathrm{i}$.

b. $\overrightarrow{NC}$ a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$. $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $-3 + 2\,\mathrm{i}$.

N appartient à la droite (BC) si et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{NC} = k\,\overrightarrow{BC}$ soit $\frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}\,\mathrm{i} = k\,(-3 + 2\,\mathrm{i})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} - \beta = -3k \\ -\frac{3}{2} = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} - \beta = -3k \\ k = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} = 2k \end{cases}$ alors M a pour affixe $3 + \frac{1}{4}\,\mathrm{i}$ et N a pour affixe $\frac{9}{4} + \frac{5}{2}\,\mathrm{i}$.

EXERCICE 2 4 points

1\. *a*. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 1 ; – 1 ; 1) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 2 ; – 5 ; – 1), leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = -2+1+1=0$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = -4+5-1=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$ soit $2(x-1)-(y-2)+z-3=0$ donc une équation du plan (ABC) est $2x-y+z-3=0$.

2\. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Si $t = -1$ alors le point de (Δ) correspondant a pour coordonnées (4 ; − 2 ; 5) donc le point D appartient à la droite (Δ).
le vecteur $\vec{n}$ (2 ; − 1 ; 1) (coefficients de – t) est un vecteur directeur de (Δ) donc cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3\. La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc E projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est l'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

Une équation du plan (ABC) est $2x-y+z-3=0$ et une représentation paramétrique de (Δ)est : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ donc les coordonnées du point d'intersection vérifient : $2(2-2t)-(-1+t)+4-t-3=0$ soit $6t=6$ donc $t=1$
Les coordonnées de E sont donc (0 ; 0 ; 3).

Le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$ soit (0 ; 0 ; 3), donc le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 3 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

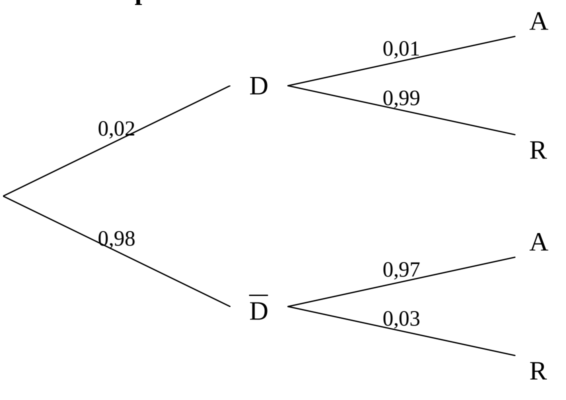
1\. **Proposition 1 : VRAIE**
Les solutions de l'équation différentielle : $y' = -y+2$ sont les fonctions de la forme $y(t) = C\,e^{-t}+2$
La solution de l'équation différentielle : $y' = -y+2$ telle que $f(\ln 2) = 1$ est telle que $C\,e^{-\ln 2}+2 = 1$ donc $C = -2$
$f(t) = -2\,e^{-t}+2$
$f'(t) = 2\,e^{-t}$ donc $f'(0) = 2$ donc la tangente au point d'abscisse 0, a pour équation $y - f(0) = 2(x-0)$ soit $y = 2x$

2\. **Proposition 2 : FAUSSE**
Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et si $g(x) = 2x$ alors $f(x)\times g(x) = 2$ donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = 2$.

3\. **Proposition 3 : FAUSSE**
Soit u_n la masse de glace au bout de n minutes, $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \left(1-\dfrac{10}{100}\right)u_n$ soit $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n$
(u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme 10 donc $u_n = 10\times 0{,}9^n$
Au bout de 70 minutes, la masse est $u_{70} = 10\times 0{,}9^{70} \approx 6{,}3\times 10^{-3}$ kg soit environ 6,3 *g*

4\. **Proposition 4 : FAUSSE**
Si A et B sont indépendants alors $p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = 0{,}16$ or $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = 0{,}4+0{,}4-0{,}16 = 0{,}64$

5\. **Proposition 5 : VRAIE**



$p(A) = p(A\cap D)+p(A\cap \overline{D}) = 0{,}02\times 0{,}01 + 0{,}98\times 0{,}97 = 0{,}950\,8$

EXERCICE 3 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. VRAIE : d'après le théorème de Bézout, puisque $(2n + 1) - 2 \times n = 1$ alors pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. FAUSSE : si $x = 3$, $x^2 + x + 3 = 15$ donc $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo et 5) or 3 n'est pas congru à 1 modulo 5

3. VRAIE : $N = 7 + 10a + 100b + 1000a$ or $10 \equiv 3$ (modulo 7) donc $100 \equiv 2$ (modulo 7) et $1000 \equiv 6$ (modulo 7)
donc $N \equiv 3a + 2b + 6a$ (modulo 7)
$N \equiv 9a + 2b$ (modulo 7) soit $N \equiv (2a + b)$ (modulo 7)
7 divise N $\Leftrightarrow$ 7 divise $2(a + b)$ or 2 et 7 sont premier entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise $a + b$

4. FAUSSE : L'écriture complexe de la similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - i$ est :

$z' - (1 - i) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)(z - (1 - i))$ soit $z' = (\sqrt{3} + i)z - \sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$

Ce qu'on aurait aussi pu vérifier en remarquant que dans l'écriture proposée, le centre de la similitude n'était pas invariant.

5. VRAIE : soit B le point d'affixe z
B est transformé en B' d'affixe $2a - z$ par la symétrie s_A
B' est transformé en B" d'affixe $2\overline{a} - \overline{z}$ par la symétrie s
B est transformé en M' d'affixe $\overline{z}$ par la symétrie s
B' est transformé en M" d'affixe $2a - \overline{z}$ par la symétrie s_A
$s \circ s_A = s_A \circ s \Leftrightarrow$ pour tout point B du plan, B" = M" $\Leftrightarrow 2\overline{a} - \overline{z} = 2a - \overline{z} \Leftrightarrow a = \overline{a} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$
L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 7 **points**

Partie A

Pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a\ ;\ b]$ donc $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$

$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$ donc $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ soit $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

1. La fonction f est définie continue dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ (somme et composée des fonctions continues dérivables sur $[0\ ;+\infty[$),

$f'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$, la fonction exponentielle est strictement positive sur R, donc $f'(x) > 0$

f est croissante $[0\ ;+\infty[$, $f(0) = 0$ donc pour tout $x \geq 0$ $f(x) \geq f(0)$ soit $f(x) \geq 0$. f est positive sur $[0\ ;+\infty[$.

2. *a.* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \ln 1 = 0$, $f(x) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$

La courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (D).

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur R, donc $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ donc $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) > 0$ donc $f(x) - x$
$(\mathscr{C})$ est au dessus de (D).

3. $\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$

a. $f(x) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$, $(\mathscr{C})$ est au dessus de (D) donc I est une mesure de l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ la droite (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b. La fonction g est définie dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ (somme et composée des fonctions dérivables sur $[0\ ;+\infty[$),

$g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t}$, $t \geq 0$ donc $g'(t) \leq 0$, g est décroissante $[0\ ;+\infty[$, $g(0) = 0$ donc pour tout $x \geq 0$ $g(x) \leq g(0)$ soit $g(x) \leq 0$.

Pour tout réel $t \geq 0$, on a $\ln(1 + t) \leq t$.

c. Pour tout réel $t \geq 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leq \ln(1 + t) \leq t$, La fonction exponentielle est strictement positive sur R, donc en posant $t = \mathrm{e}^{-x}$

alors pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} \leq \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{-x}$

d. Les fonctions $x \to \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$; $x \to \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$; $x \to \mathrm{e}^{-x}$ sont continues sur $[0\ ;+\infty[$, et pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, on a :

$\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} \leq \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{-x}$ donc $\int_0^1 1\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

donc $\Big[-\ln(1+\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \leq \mathrm{I} \leq \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1$ donc $-\ln(1 + \mathrm{e}^{-1}) + \ln 2 \leq \mathrm{I} \leq -\mathrm{e}^{-1} + 1$ soit $\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right) \leq \mathrm{I} \leq 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

e. $0{,}3 \leq \ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right) \leq \mathrm{I} \leq 1 - \mathrm{e}^{-1}.\leq 0{,}7$ donc un encadrement de I d'amplitude 0,4 est $0{,}3 \leq \mathrm{I} \leq 0{,}7$.

4. $(\mathscr{C})$ est au dessus de (D) donc $\mathrm{MN} = f(x) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$

L'unité de longueur est 1cm donc M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN <0,05 cm soit quand $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) < 0{,}05 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{0{,}05} - 1 \Leftrightarrow -x < \ln(\mathrm{e}^{0{,}05} - 1) \Leftrightarrow x > -\ln(\mathrm{e}^{0{,}05} - 1)$ or $-\ln(\mathrm{e}^{0{,}05} - 1) \approx 3{,}676$ donc M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque $x > -\ln(\mathrm{e}^{0{,}05} - 1)$.