Asie Juin 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + \text{i})\, z^2 + (17 - 8\,\text{i})\, z + 17\,\text{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que − i est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que : $z^3 + (-8 + \text{i})\, z^2 + (17 - 8\,\text{i})\, z + 17\,\text{i} = (z + \text{i})\,(a\, z^2 + b\, z + c)$.

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives 4 + i, 4 − i,− i.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Calculer l'affixe de S.

3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle C dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer C .

4. À tout point M d'affixe z 6= 2, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}\, z - 10 - 2\,\text{i}}{z - 2}$.

a. Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ associés respectivement aux points A, B et C.

b. Vérifier que A′, B′, C′ appartiennent à un cercle C ′ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer C ′.

c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|\, z' - \text{i}\,|$ en fonction de z.

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle C . Démontrer que $|\, z' - \text{i}\,| = 2\sqrt{5}$.

e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M′ associés aux points M du cercle C .

CORRECTION

Partie I

1. $(-\text{i})^3 = (-\text{i}) \times (-\text{i})^2 = -\text{i} \times (-1) = \text{i}$

donc $(-\text{i})^3 + (-8 + \text{i})\,(-\text{i})^2 + (17 - 8\,\text{i})\,(-\text{i}) + 17\,\text{i} = \text{i} - (-8 + \text{i}) - 17\,\text{i} + 8\,\text{i}^2 + 17\,\text{i} = \text{i} + 8 - \text{i} - 17\,\text{i} - 8 + 17\,\text{i} = 0$

donc (– i) est solution de (E).

2. $(z + \text{i})\,(a\, z^2 + b\, z + c) = a\, z^3 + b\, z^2 + c\, z + \text{i}\, a\, z^2 + b\,\text{i}\, z + c\,\text{i} = a\, z^3 + (b + \text{i}\, a)\, z^2 + (c + b\,\text{i})\, z + c\,\text{i}$

Deux polynômes égaux pour tout x réel, ont leurs coefficients des termes de même degré égaux, donc en identifiant les coefficients de même degré :

$a = 1$; $b + \text{i}\, a = -8 + \text{i}$; $c + \text{i}\, b = 17 - 8\,\text{i}$ et $c\,\text{i} = 17\,\text{i}$

soit $a= 1$, $b = -8$ et $c = 17$

$z^3 + (-8 + \text{i})\, z^2 + (17 - 8\,\text{i})\, z + 17\,\text{i} = (z + \text{i})\,(z^2 - 8\, z + 17)$.

3. $(z + \text{i})\,(z^2 - 8\, z + 17) = 0 \Leftrightarrow z + \text{i} = 0$ ou $z^2 - 8\, z + 17 = 0$

$z^2 - 8\, z + 17 = 0$

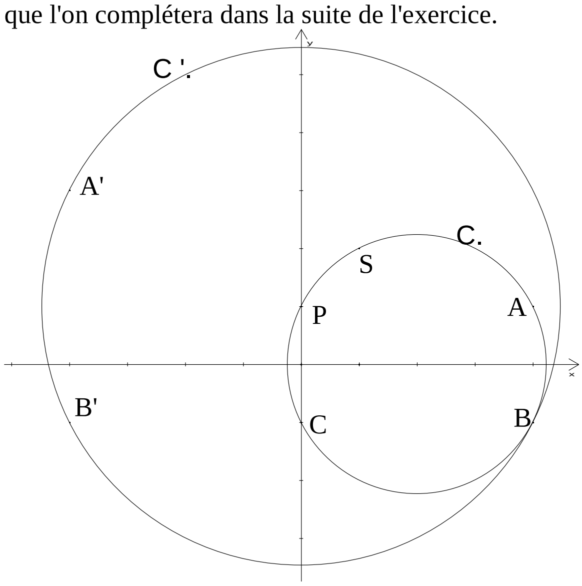
$\Delta = 64 - 4 \times 17 = -4 = (2\,\text{i})^2$

donc $z_1 = \dfrac{8 + 2\,\text{i}}{2} = 4 + \text{i}$ ou $z_2 = 4 - \text{i}$

$z^3 + (-8 + \text{i})\, z^2 + (17 - 8\,\text{i})\, z + 17\,\text{i} = 0 \Leftrightarrow z \in \{ -\text{i} \,;\, 4 + \text{i} \,;\, 4 - \text{i}\}$

Partie II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives 4 + i, 4 – i, – i.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.



2. La rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe :

$z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$ soit $z' - 2 = i\,(z - 2)$ soit $z' = i\,z + 2 - 2\,i$
donc A a pour affixe : $z' = i\,(4 + i) + 2 - 2\,i = 4\,i - 1 + 2 - 2\,i$ donc S pour affixe : $z' = 1 + 2\,i$

3. S est l'image de A par la rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $\Omega S = \Omega A$
$\Omega A^2 = |\,4 + i - 2\,|^2 = |\,2 + i\,|^2 = 5$
$\Omega B^2 = |\,3 + 2\,i - 2\,|^2 = |\,1 + 2\,i\,|^2 = 5$
$\Omega C^2 = |\,3 - 2\,i - 2\,|^2 = |\,1 - 2\,i\,|^2 = 5$
donc A, B, S, C appartiennent au cercle de centre Ω de rayon $\sqrt{5}$.

4. *a*. A' a pour affixe $a' = \dfrac{i\,(4+i) - 10 - 2\,i}{4 + i - 2} = \dfrac{-11 + 2\,i}{2 + i} = \dfrac{(-11 + 2\,i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$

$a' = \dfrac{-22 + 2 + 4\,i + 11\,i}{5} = \dfrac{-20 + 15\,i}{5} = -4 + 3\,i$

$b' = \dfrac{i\,(4 - i) - 10 - 2\,i}{(4 - i) - 2} = \dfrac{-9 + 2\,i}{2 - i} = \dfrac{(-9 + 2\,i)(2 + i)}{(2 + i)(2 - i)}$

$b' = \dfrac{-18 - 9\,i + 4\,i - 2}{5} = -4 - i$

$c' = \dfrac{i\,(-i) - 10 - 2\,i}{-i - 2} = \dfrac{-9 - 2\,i}{-2 - i} = \dfrac{9 + 2\,i}{2 + i} = \dfrac{(9 + 2\,i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$

$c' = \dfrac{18 - 9\,i + 4\,i + 2}{5} = 4 - i$

b. $PA'^2 = |\,-4 + 3\,i - i\,|^2 = |\,-4 + 2\,i\,|^2 = 20$
$PB'^2 = |\,-4 - i - i\,|^2 = |\,-4 - 2\,i\,|^2 = 20$
$PC'^2 = |\,4 - i - i\,|^2 = |\,4 - 2\,i\,|^2 = 20$
donc $PA' = PB' = PC' = 2\sqrt{5}$ donc A', B', C' appartiennent à un cercle C ' de centre P, d'affixe i, de rayon $2\sqrt{5}$.

c. $z' - i = \dfrac{i\,z - 10 - 2\,i}{z - 2} - i = \dfrac{-10}{z - 2}$ donc $|\,z' - i\,| = \left|\dfrac{-10}{z - 2}\right| = \dfrac{|-10|}{|z - 2|} = \dfrac{10}{|z - 2|}$

d. Si M un point d'affixe z appartenant au cercle C alors $PM = \sqrt{5}$ soit $|\,z - i\,| = \sqrt{5}$
donc $|\,z' - i\,| = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ donc $|\,z' - i\,| = 2\sqrt{5}$

e. Si M un point d'affixe z appartenant au cercle C alors $|\,z' - i\,| = 2\sqrt{5}$ donc $PM' = 2\sqrt{5}$
donc M' appartient à C'.