Centres étrangers juin 2015

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^{x} - x$.

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^{x} - 1)(2e^{x} + 1)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables :	n est un entier,
	u et M sont deux réels
Initialisation :	u prend la valeur 0,02
	n prend la valeur 0
	Saisir la valeur de M
Traitement :	Tant que ...
	……..
	……..
	Fin tant que
Sortie :	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si M = 60.

CORRECTION

1. *a.* $g'(x) = 2\,e^{2x} - e^{x} - 1$

Pour tout réel x : $(e^{x} - 1)(2\,e^{x} + 1) = 2\,e^{2x} + e^{x} - 2\,e^{x} - 1 = 2\,e^{2x} - e^{x} - 1 = g'(x)$.

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $2\,e^{x} + 1 > 0$ (somme de termes strictement positifs)
$e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$ donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Elle admet un minimum pour $x = 0$ et son minimum est $g(0) = 0$.

c. $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$
La fonction g admet un minimum pour $x = 0$ et son minimum est $g(0) = 0$ donc pour tout x réel, $g(x) \geq 0$
$u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ or $g(u_n) \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est croissante

2. *a.* **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = a$ donc $u_0 \leq 0$. La propriété est vraie au rang 0
Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si la propriété vraie au rang n : $(u_n \leq 0)$ alors elle est vraie au rang $n + 1$ donc $(u_{n+1} \leq 0)$
$u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$ or la fonction exponentielle est toujours positive et $u_n \leq 0$ donc $e^{u_n} \leq 1$ donc $u_{n+1} \leq 0$.
La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq 0$.

b. La suite (u_n) est croissante, majorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.
c. La suite (u_n) est croissante, majorée par 0 donc si a vaut 0, on a $u_0 \leq u_n \leq 0$ soit $0 \leq u_n \leq 0$ donc pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$. La limite de la suite (u_n) est 0.

3. *a.* $a \geq 0$ et la fonction g est croissante sur $[0 ; +\infty[$ or pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$ donc $g(u_n) \geq g(a)$ donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b. **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = a$ or $a + 0 \times g(a) = a$ donc $u_0 \geq a + 0 \times g(a)$. La propriété est vraie au rang 0
Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si la propriété vraie au rang n : $(u_n \geq a + n \times g(a))$ alors elle est vraie au rang $n + 1$ donc $(u_{n+1} \geq a + (n + 1) \times g(a))$.
$u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ donc $u_{n+1} \geq u_n + g(a)$ or $u_n \geq a + n \times g(a)$ donc $u_{n+1} \geq a + n \times g(a) + g(a)$ soit $u_{n+1} \geq a + (n + 1) \times g(a)$.
La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$

c. $a > 0$ et la fonction g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ $g(a) > g(0)$ or $g(0) = 0$ donc $g(a) > 0$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a + n \times g(a) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4. *a.*

Variables :	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation :	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement :	Tant que ***a* < M** **u prend la valeur $e^{2u} - e^{u}$** **n prend la valeur $n + 1$** Fin tant que
Sortie :	Afficher n

b. Si M = 60 alors l'algorithme affiche 36.

n	u_n
35	2,12968123
36	62,3526684
37	$1{,}4416 \times 10^{54}$

$u_{35} < 60$ et $u_{36} > 60$ donc $n = 36$.