On se propose de calculer l'intégrale I = $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$. Soit J = $\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que I = $\frac{-1}{1+\mathrm{e}} + \mathrm{J}$

3. Montrer que pour tout x réel : $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, en déduire que J = ln 2 – ln (1 + e). Déterminer I.

CORRECTION

1. Soit $u'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

Soit w la fonction définie par $w(x) = 1 + \mathrm{e}^x$; $w'(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u'(x) = \frac{w'(x)}{[w(x)]^2} = w'\,w^{-2}$ (en abrégé)

donc u' est de la forme $\mathrm{U}'\,\mathrm{U}^n$ donc admet pour primitive $\frac{1}{n+1}\mathrm{U}^{n+1}$ avec $n = -2$ donc $n + 1 = -1$ donc u' admet pour primitive

$\frac{1}{-1}w^{-1} = \frac{-1}{1+\mathrm{e}^x}$

2. $u'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ $\qquad u(x) = \frac{-1}{1+\mathrm{e}^x}$

$v(x) = x$ $\qquad v'(x) = 1$ $\qquad$ donc I = $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x}{1+\mathrm{e}^x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

I = $\frac{-1}{1+\mathrm{e}} - 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ soit I = $\frac{-1}{1+\mathrm{e}} + \mathrm{J}$

3. $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{1\times\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Soit $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$ alors $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ donc $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$

donc la fonction $x \to \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ admet pour primitive $-\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ donc J = $-\ln(1+\mathrm{e}^1) - [-\ln(1+\mathrm{e}^0)]$

J = ln 2 – ln (1 + e) donc I = $\frac{-1}{1+\mathrm{e}} + \ln 2 - \ln(1+\mathrm{e})$